Algorithme 2

Flot maximum

Louis-Claude Canon
louis-claude.canon@univ-fcomte.fr

Licence 2 Informatique – Semestre 4

Plan

Réseaux de transport

La méthode de Ford-Fulkerson (1955)

Coupe dans un réseau de transport

Conclusion

Plan

Réseaux de transport

La méthode de Ford-Fulkerson (1955)

Coupe dans un réseau de transport

Conclusion

Définitions

- Un *réseau de transport* est un graphe orienté $G = (V, E)$ avec une *capacité* $c : E \to \mathbb{N}$ associée à chaque arc ($c(u, v) = 0$ si $(u, v) \notin E$) et 2 sommets particuliers : s la *source* et t le *puits*.
- Un *flot* de G est une fonction $f : V \times V \to \mathbb{N}$ qui respecte 2 propriétés :

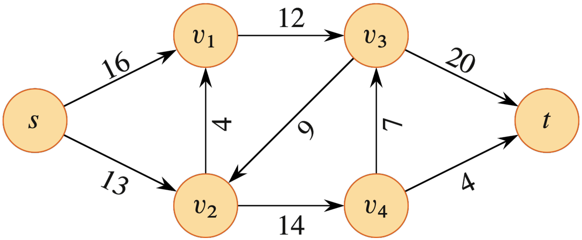
  La contrainte de capacité Le flot ne dépasse pas la capacité de chaque arc :
  $\forall (u, v) \in E, f(u, v) \leq c(u, v)$.

  La conservation du flot Le flot entrant est égal au flot sortant de chaque sommet :
  $\forall u \in V \setminus \{s, t\}, \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v)$

- Le flot et la capacité se représentent sur les arcs avec un "/" : $f(u, v)/c(u, v)$.
- Le *problème du flot maximum* consiste à trouver le flot qui maximise le flot généré par la source :

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

Exemple



Définitions

- Un *réseau de transport* est un graphe orienté $G = (V, E)$ avec une *capacité* $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ associée à chaque arc ($c(u, v) = 0$ si $(u, v) \notin E$) et 2 sommets particuliers : s la *source* et t le *puits*.
- Un *flot* de G est une fonction $f : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ qui respecte 2 propriétés :

  La contrainte de capacité Le flot ne dépasse pas la capacité de chaque arc : $\forall (u, v) \in E, f(u, v) \leq c(u, v)$.

  La conservation du flot Le flot entrant est égal au flot sortant de chaque sommet : $\forall u \in V \setminus \{s, t\}, \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v)$.
- Le flot et la capacité se représentent sur les arcs avec un "/" : $f(u, v)/c(u, v)$.
- Le *problème du flot maximum* consiste à trouver le flot qui maximise le flot généré par la source :

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

Définitions

- Un *réseau de transport* est un graphe orienté $G = (V, E)$ avec une *capacité* $c : E \to \mathbb{N}$ associée à chaque arc ($c(u, v) = 0$ si $(u, v) \notin E$) et 2 sommets particuliers : s la *source* et t le *puits*.
- Un *flot* de G est une fonction $f : V \times V \to \mathbb{N}$ qui respecte 2 propriétés :

  La contrainte de capacité Le flot ne dépasse pas la capacité de chaque arc :
  $$\forall (u, v) \in E, f(u, v) \leq c(u, v).$$

  La conservation du flot Le flot entrant est égal au flot sortant de chaque sommet :
  $$\forall u \in V \setminus \{s, t\}, \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v).$$
- Le flot et la capacité se représentent sur les arcs avec un "/" : $f(u, v)/c(u, v)$.
- Le *problème du flot maximum* consiste à trouver le flot qui maximise le flot généré par la source :
$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

Définitions

- Un *réseau de transport* est un graphe orienté $G = (V, E)$ avec une *capacité* $c : E \to \mathbb{N}$ associée à chaque arc ($c(u, v) = 0$ si $(u, v) \notin E$) et 2 sommets particuliers : s la *source* et t le *puits*.
- Un *flot* de G est une fonction $f : V \times V \to \mathbb{N}$ qui respecte 2 propriétés :

  La contrainte de capacité Le flot ne dépasse pas la capacité de chaque arc :
  $$\forall (u, v) \in E, f(u, v) \leq c(u, v).$$
  La conservation du flot Le flot entrant est égal au flot sortant de chaque sommet :
  $$\forall u \in V \setminus \{s, t\}, \textstyle\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v).$$
- Le flot et la capacité se représentent sur les arcs avec un "/" : $f(u, v)/c(u, v)$.
- Le *problème du flot maximum* consiste à trouver le flot qui maximise le flot généré par la source :

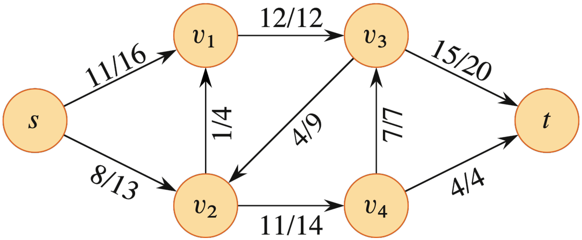
$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

Définitions

- Un *réseau de transport* est un graphe orienté $G = (V, E)$ avec une *capacité* $c : E \to \mathbb{N}$ associée à chaque arc ($c(u, v) = 0$ si $(u, v) \notin E$) et 2 sommets particuliers : s la *source* et t le *puits*.
- Un *flot* de G est une fonction $f : V \times V \to \mathbb{N}$ qui respecte 2 propriétés :

  La contrainte de capacité Le flot ne dépasse pas la capacité de chaque arc :
  $$\forall (u, v) \in E, f(u, v) \leq c(u, v).$$
  La conservation du flot Le flot entrant est égal au flot sortant de chaque sommet :
  $$\forall u \in V \setminus \{s, t\}, \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v).$$
- Le flot et la capacité se représentent sur les arcs avec un "/" : $f(u, v)/c(u, v)$.
- Le *problème du flot maximum* consiste à trouver le flot qui maximise le flot généré par la source :
$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

Exemple



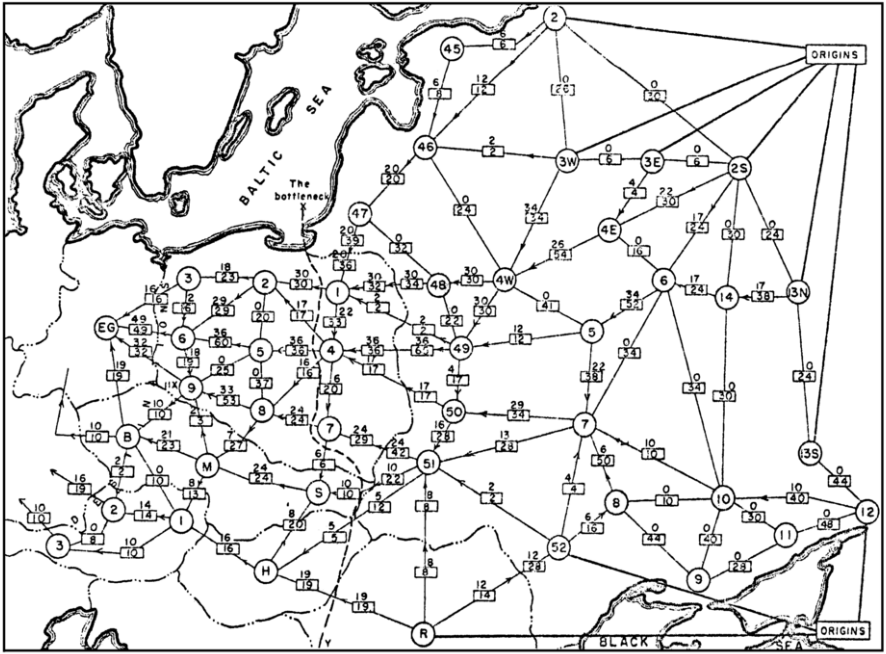
Définitions

- Un *réseau de transport* est un graphe orienté $G = (V, E)$ avec une *capacité* $c : E \to \mathbb{N}$ associée à chaque arc ($c(u, v) = 0$ si $(u, v) \notin E$) et 2 sommets particuliers : s la *source* et t le *puits*.
- Un *flot* de G est une fonction $f : V \times V \to \mathbb{N}$ qui respecte 2 propriétés :

  La contrainte de capacité Le flot ne dépasse pas la capacité de chaque arc :
  $$\forall (u, v) \in E, f(u, v) \leq c(u, v).$$
  La conservation du flot Le flot entrant est égal au flot sortant de chaque sommet :
  $$\forall u \in V \setminus \{s, t\}, \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v).$$
- Le flot et la capacité se représentent sur les arcs avec un "/" : $f(u, v)/c(u, v)$.
- Le *problème du flot maximum* consiste à trouver le flot qui maximise le flot généré par la source :
  $$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

Contextes d'utilisation concrets

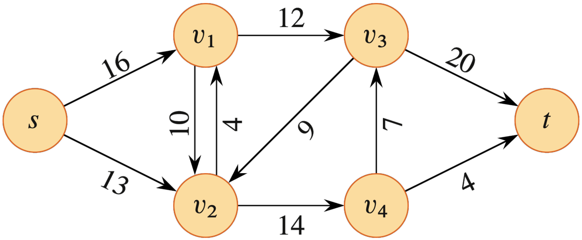
- Segmentation d'images.
- Planification des vols.
- Problème des mariages stables.
- Problème d'élimination du Baseball.
- Couplage dans des graphes bipartis.
- Distribution dans l'union soviétique vers les pays d'Europe de l'est.


BALTIC SEA
The bottleneck
ORIGINS
ORIGINS
BLACK SEA
EG
3W
3E
2S
4E
4W
13N
13S

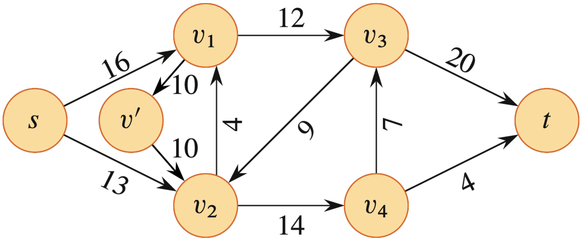
Arcs anti-parallèles

- Deux arcs sont *anti-parallèles* si leurs sens sont inversés : (u, v) et (v, u) sont antiparallèles.
- Les algorithmes considérés plus tard nécessite qu'il n'y en ait pas.
- On peut transformer un réseau de transport ayant des arcs anti-parallèles en rajoutant des sommets pour les éliminer.

Exemple



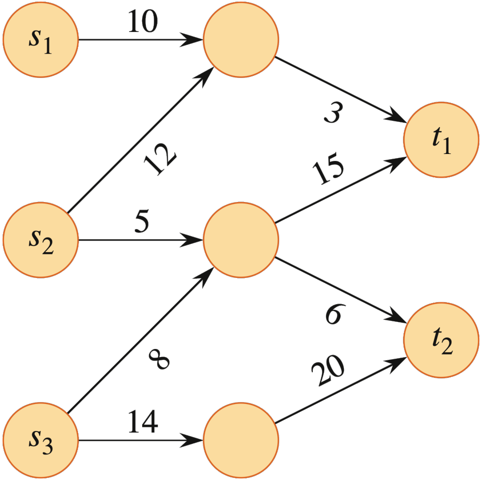
Exemple



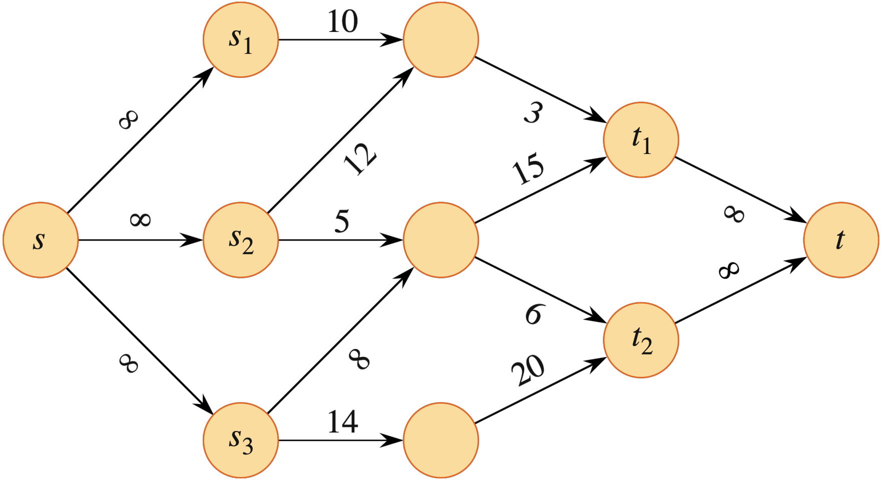
Sources et puits multiples

- Un réseau de transport nécessite une seule source et un seul puits.
- On peut à nouveau transformer un réseau de transport avec plusieurs sources et plusieurs puits en rajoutant une source et un puits unique.

Exemple

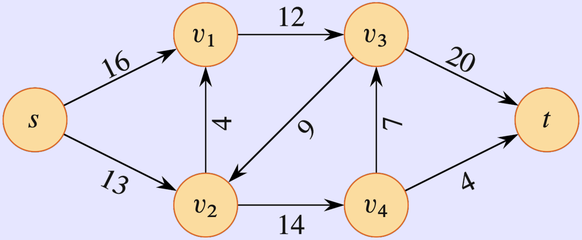


Exemple


s_1
10
∞
12
3
t_1
15
s
∞
s_2
5
∞
t
∞
6
t_2
∞
∞
20
s_3
14

Question

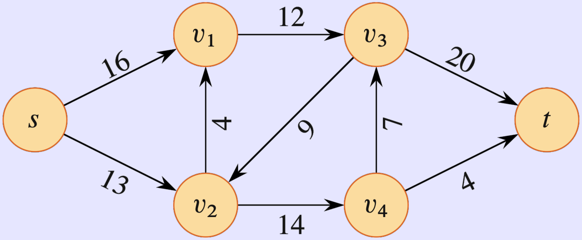
Quel est le flot maximum du réseau de transport suivant ?



1. 19
2. 21
3. 23
4. 24

Question

Quel est le flot maximum du réseau de transport suivant ?



1. 19
2. 21
3. 23 ✓
4. 24

Plan

Réseaux de transport

La méthode de Ford-Fulkerson (1955)

Coupe dans un réseau de transport

Conclusion

Pseudo-code de Méthode-Ford-Fulkerson

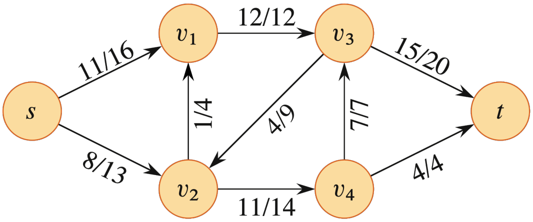
```
MÉTHODE-FORD-FULKERSON(G, s, t)
initialiser le flot f à 0
tant que il existe un chemin améliorant p dans le réseau résiduel G_f faire
    augmenter le flot f le long de p
retourner f
```

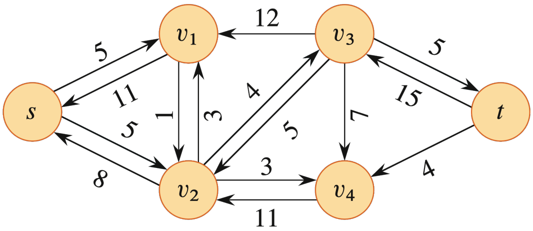
- La méthode Ford-Fulkerson correspond à une famille d'algorithmes pour le flot maximum, comme ACM-Générique pour les arbres couvrants de poids minimum.
- La méthode construit itérativement un flot en se reposant sur deux notions : le chemin améliorant et le réseau résiduel.

Réseau résiduel

- Étant donné un flot f pour un réseau de transport $G = (V, E)$, le *réseau résiduel* montre comment le flot peut évoluer pour chaque arc.
- Il est défini par $G_f = (V, E)$ avec une capacité résiduelle $c_f : E \to \mathbb{N}$ sur les arcs telle que :

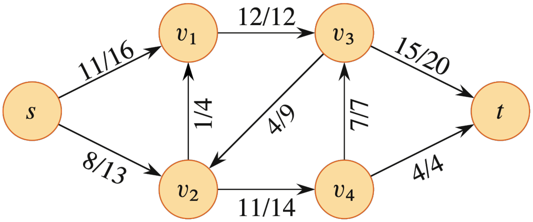
$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{si } (u, v) \in E \\ f(v, u) & \text{si } (v, u) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

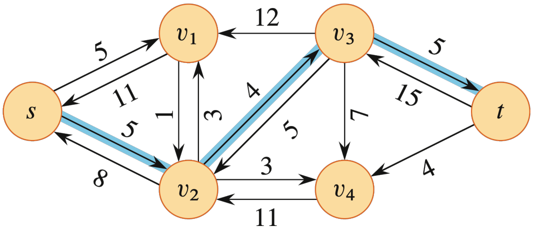




Chemin améliorant

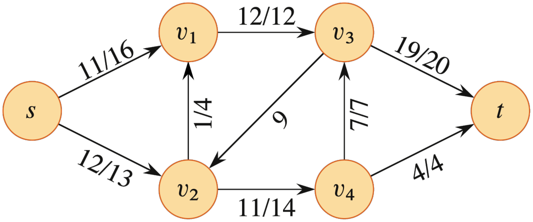
- Étant donné un réseau résiduel, un *chemin améliorant* est un chemin de la source au puits.
- Par définition du réseau résiduel, le flot de chaque arc $(u, v) \in E$ peut augmenter de $c_f(u, v)$ (ou diminuer de $c_f(v, u)$).
- Sur un chemin améliorant p, le flot peut donc être augmenté de $\min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$.

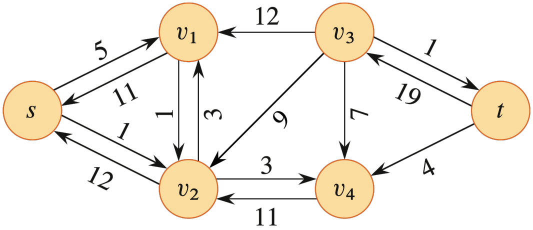




Terminaison

Lorsqu'il n'y a plus de chemin améliorant, on a un flot maximum :



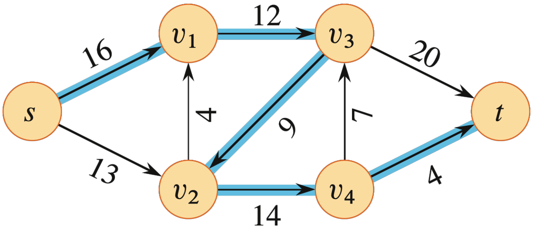


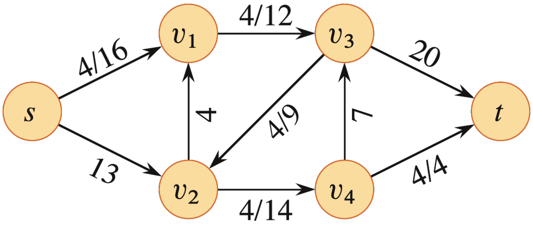
Pseudo-code de Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson(G, s, t)

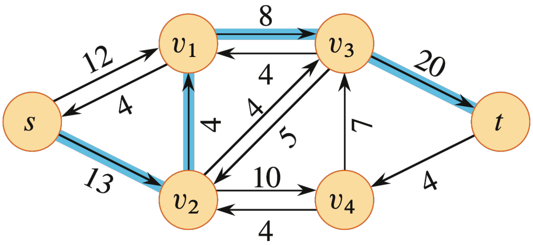
pour chaque arc $(u, v) \in G.E$ **faire**
  $(u, v).f \leftarrow 0$
tant que il existe un chemin p de s à t dans le réseau résiduel G_f **faire**
  $c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$
  pour chaque arc $(u, v) \in p$ **faire**
    si $(u, v) \in G.E$ **alors**
      $(u, v).f \leftarrow (u, v).f + c_f(p)$
    sinon
      $(v, u).f \leftarrow (v, u).f - c_f(p)$
retourner f

Exemple

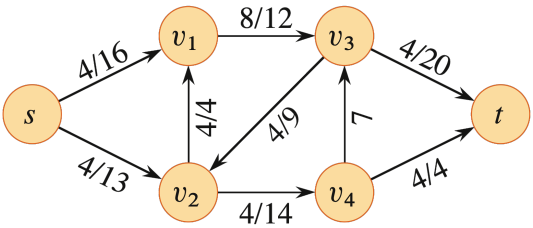

16
12
20
13
4
9
7
14
4
s
v1
v2
v3
v4
t


4/16
4/12
20
13
4
4/9
7
4/14
4/4
s
v1
v2
v3
v4
t

Exemple

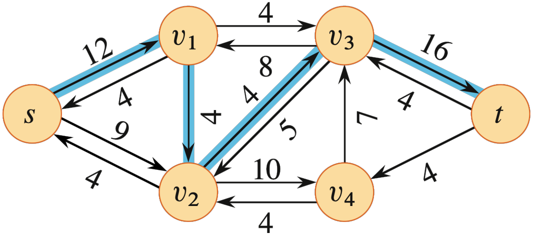


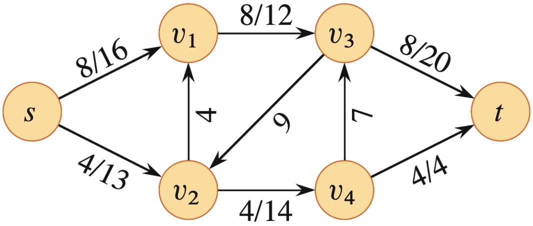
s
v1
v2
v3
v4
t
12
4
13
4
8
4
4
5
10
4
7
20
4



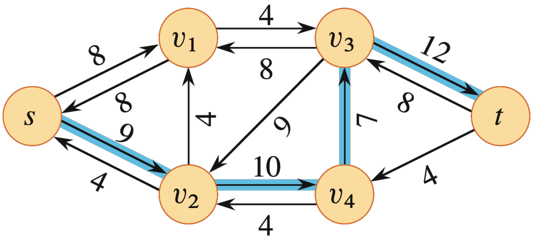
s
v1
v2
v3
v4
t
4/16
4/13
8/12
4/4
4/9
4/14
7
4/20
4/4

Exemple

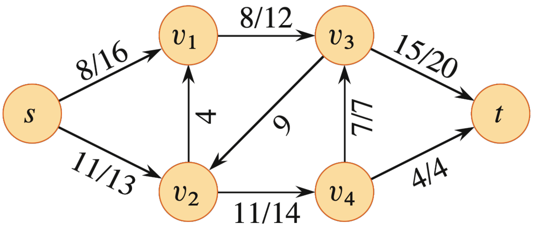

s
v1
v2
v3
v4
t
12
4
9
4
4
4
8
4
5
10
4
7
4
16
4


s
v1
v2
v3
v4
t
8/16
4/13
8/12
4
9
4/14
7
8/20
4/4

Exemple

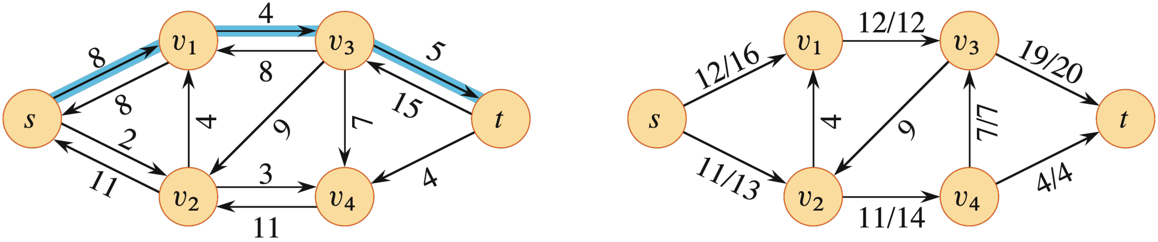


v_1
v_3
s
t
v_2
v_4
4
8
8
8
9
4
4
9
7
12
8
10
4
4

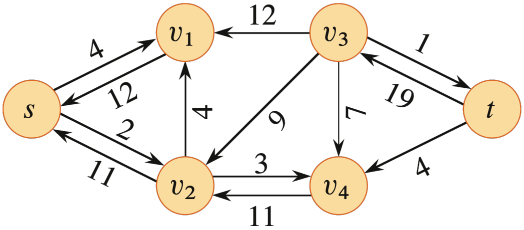


v_1
v_3
s
t
v_2
v_4
8/12
8/16
15/20
4
9
7/7
11/13
11/14
4/4

Exemple


s
v1
v2
v3
v4
t
8
8
4
8
2
4
11
9
7
15
5
3
11
4
s
v1
v2
v3
v4
t
12/16
12/12
11/13
4
9
7/7
19/20
11/14
4/4

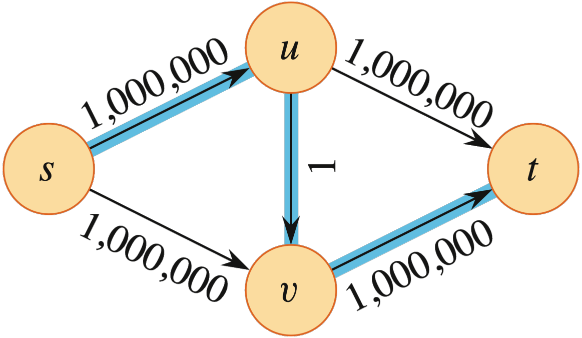
Exemple



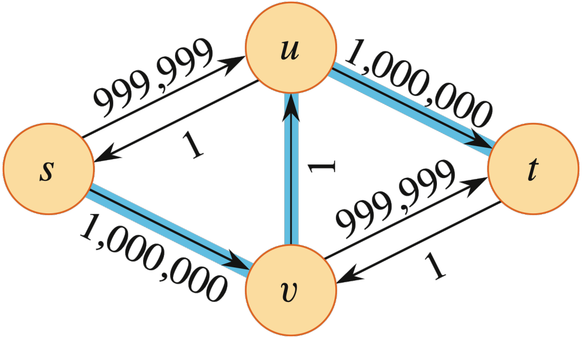
Analyse de complexité

- L'initialisation du flot f prend un temps $O(E)$.
- Chaque itération de la boucle **tant que** prend un temps $O(E)$ avec une implémentation efficace :
  - le réseau résiduel est initialisé une fois en temps $O(E)$;
  - la recherche d'un chemin augmentant de s à t prend un temps $O(E)$;
  - la mise à jour du flot et du réseau résiduel prend un temps $O(E)$.
- Chaque itération augmente le flot d'au moins 1.
- Si le flot maximum est $|f^*|$, la complexité en temps est donc $O(E|f^*|)$

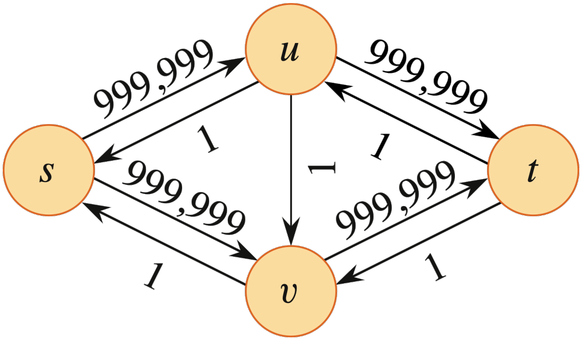
Pire cas



Pire cas



Pire cas

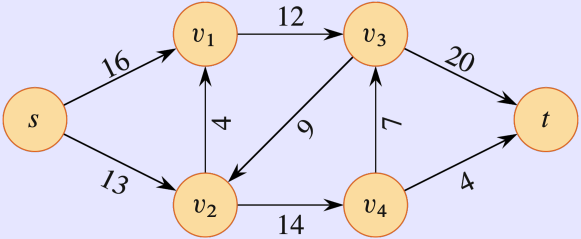


Algorithme d'Edmonds-Karp (1970)

- L'algorithme d'Edmonds-Karp suit la méthode de Ford-Fulkerson en utilisant un parcours en largeur pour trouver un chemin améliorant.
- L'algorithme considère $O(VE)$ chemins améliorants pour terminer.
- La complexité en temps devient alors $O(VE^2)$.
- Ce résultat tient même si les capacités sont réelles.

Question

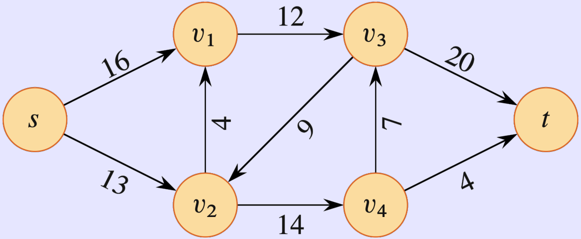
Quels sont les flots successifs du réseau de transport suivant lorsqu'on applique l'algorithme d'Edmonds-Karp ? On supposera que les sommets sont toujours considérés dans l'ordre alphabétique.



1. 12, 16, 23
2. 4, 8, 12, 19, 23
3. 4, 16, 23
4. 12, 16, 19, 23

Question

Quels sont les flots successifs du réseau de transport suivant lorsqu'on applique l'algorithme d'Edmonds-Karp ? On supposera que les sommets sont toujours considérés dans l'ordre alphabétique.



1. 12, 16, 23 ✓ $\langle s, v_1, v_3, t\rangle$, $\langle s, v_2, v_4, t\rangle$, $\langle s, v_2, v_4, v_3, t\rangle$
2. 4, 8, 12, 19, 23
3. 4, 16, 23
4. 12, 16, 19, 23

Plan

Réseaux de transport

La méthode de Ford-Fulkerson (1955)

Coupe dans un réseau de transport

Conclusion

Définitions

- Une *coupe* (S, T) d'un réseau de transport $G = (V, S)$ est une partition de V dans S et $T = V \setminus S$ telle que $s \in S$ et $t \in T$.
- La *capacité* de la coupe (S, T) est :

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$$

- Le *problème de la coupe minimum* consiste à déterminer la coupe (S, T) de plus petite capacité.
- Le problème de la coupe minimum est le problème dual du problème du flot maximum : chaque coupe a une capacité plus grande ou égale que n'importe quelle valeur de flot.
- On s'en sert pour prouver la validité de la méthode Ford-Fulkerson grâce au théorème flot maximum / coupe minimum.

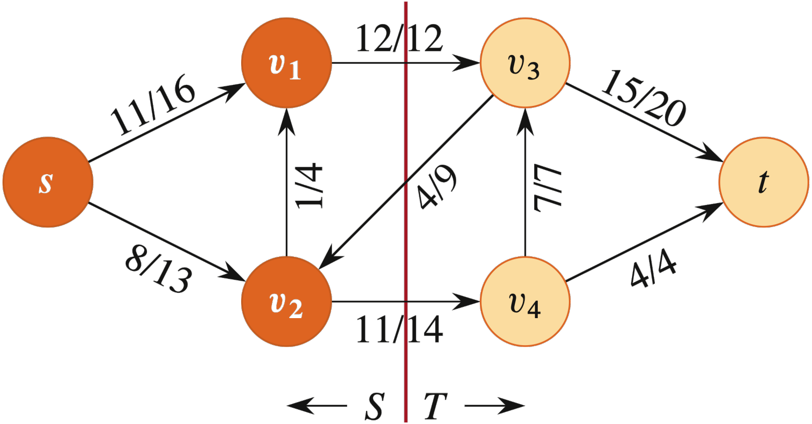
Définitions

- Une *coupe* (S, T) d'un réseau de transport $G = (V, S)$ est une partition de V dans S et $T = V \setminus S$ telle que $s \in S$ et $t \in T$.
- La *capacité* de la coupe (S, T) est :

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

- Le *problème de la coupe minimum* consiste à déterminer la coupe (S, T) de plus petite capacité.
- Le problème de la coupe minimum est le problème dual du problème du flot maximum : chaque coupe a une capacité plus grande ou égale que n'importe quelle valeur de flot.
- On s'en sert pour prouver la validité de la méthode Ford-Fulkerson grâce au théorème flot maximum / coupe minimum.

Exemple



Définitions

- Une *coupe* (S, T) d'un réseau de transport $G = (V, S)$ est une partition de V dans S et $T = V \setminus S$ telle que $s \in S$ et $t \in T$.
- La *capacité* de la coupe (S, T) est :

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

- Le *problème de la coupe minimum* consiste à déterminer la coupe (S, T) de plus petite capacité.
- Le problème de la coupe minimum est le problème dual du problème du flot maximum : chaque coupe a une capacité plus grande ou égale que n'importe quelle valeur de flot.
- On s'en sert pour prouver la validité de la méthode Ford-Fulkerson grâce au théorème flot maximum / coupe minimum.

Définitions

- Une *coupe* (S, T) d'un réseau de transport $G = (V, S)$ est une partition de V dans S et $T = V \setminus S$ telle que $s \in S$ et $t \in T$.
- La *capacité* de la coupe (S, T) est :

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

- Le *problème de la coupe minimum* consiste à déterminer la coupe (S, T) de plus petite capacité.
- Le problème de la coupe minimum est le problème dual du problème du flot maximum : chaque coupe a une capacité plus grande ou égale que n'importe quelle valeur de flot.
- On s'en sert pour prouver la validité de la méthode Ford-Fulkerson grâce au théorème flot maximum / coupe minimum.

Définitions

- Une *coupe* (S, T) d'un réseau de transport $G = (V, S)$ est une partition de V dans S et $T = V \setminus S$ telle que $s \in S$ et $t \in T$.
- La *capacité* de la coupe (S, T) est :

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

- Le *problème de la coupe minimum* consiste à déterminer la coupe (S, T) de plus petite capacité.
- Le problème de la coupe minimum est le problème dual du problème du flot maximum : chaque coupe a une capacité plus grande ou égale que n'importe quelle valeur de flot.
- On s'en sert pour prouver la validité de la méthode Ford-Fulkerson grâce au théorème flot maximum / coupe minimum.

Théorème (Théorème flot maximum / coupe minimum)

Si f est un flot dans un réseau de transport $G = (V, E)$ de source s et de puits t, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *il existe une coupe (S, T) de G telle que $|f| = c(S, T)$;*
2. *f est un flot maximum dans G ;*
3. *le réseau résiduel G_f ne contient aucun chemin améliorant.*

Preuve $1 \to 2$

Démonstration.

- On veut montrer que s'il existe une coupe (S, T) de G telle que $|f| = c(S, T)$, alors f est un flot maximum dans G.
- Supposons que ce ne soit pas le cas : soit f^* soit un flot maximum tel que $|f^*| > |f|$.
- Il y aurait plus que $|f|$ unités à faire passer de S à T.
- Or, $c(S, T)$ est la capacité maximale totale des arcs allant de S à T. On a donc une contradiction.
- Donc, on a $|f| \leq c(S, T)$ et f est bien un flot maximum.

□

Preuve 2 $\rightarrow$ 3

Démonstration.

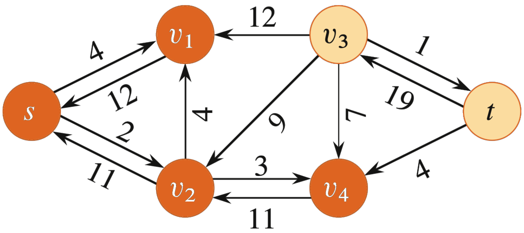
- On veut montrer que si f est un flot maximum dans G, alors G_f ne contient aucun chemin améliorant.
- Supposons que G_f contienne un chemin améliorant.
- Alors, on peut augmenter le flot f et il n'est alors pas maximum. On a donc une contradiction.

$\square$

Preuve $3 \rightarrow 1$

Démonstration.

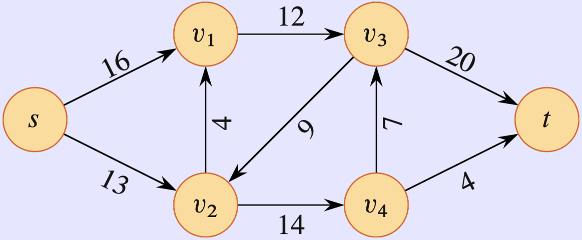
- On veut montrer que si G_f ne contient aucun chemin améliorant, alors il existe une coupe (S, T) de G telle que $|f| = c(S, T)$.
- Il suffit de montrer comment construire cette coupe (S, T).
- On met dans S tous les sommets qui ont un chemin à partir de s dans G_f. t est donc dans T car il n'y a pas de chemin améliorant.
- Pour tout arc entre S et T, on a $u \in S$ et $v \in T$:
  - si $(u, v) \in E$ alors $f(u, v) = c(u, v)$;
  - si $(v, u) \in E$ alors $f(v, u) = 0$;
  - sinon, $f(u, v) = f(v, u) = 0$.



- On peut vérifier que $|f| = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) = c(S, T)$.

Question

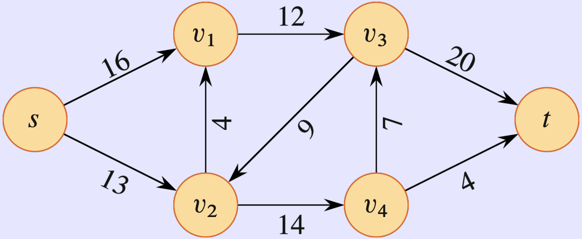
Quelle est la coupe minimum du réseau de transport suivant ?



1. $(\{s, v_1\}, \{v_2, v_3, v_4, t\})$
2. $(\{s, v_1, v_3\}, \{v_2, v_4, t\})$
3. $(\{s, v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, t\})$
4. $(\{s, v_1, v_2, v_4\}, \{v_3, t\})$

Question

Quelle est la coupe minimum du réseau de transport suivant ?



1. $(\{s, v_1\}, \{v_2, v_3, v_4, t\})$
2. $(\{s, v_1, v_3\}, \{v_2, v_4, t\})$
3. $(\{s, v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, t\})$
4. $(\{s, v_1, v_2, v_4\}, \{v_3, t\})$ ✓

Plan

Réseaux de transport

La méthode de Ford-Fulkerson (1955)

Coupe dans un réseau de transport

Conclusion

Algorithmes similaires

Curiosité

Comme pour le plus court chemin, il existe de nombreux algorithmes :

- Algorithme de poussage/réétiquetage (1986) : un des algorithmes les plus efficaces.
- Chen (2022) : algorithme presque linéaire, $O(E^{1+o(1)})$.
- Une vingtaine d'algorithmes sur la page wikipédia dédiée.
- On ne sait pas encore s'il existe un algorithme linéaire en $|E|$.

Résumé

Contenu

- Le problème du flot maximum consiste à trouver une valeur de flot sur chaque arc en respectant les contraintes de capacité et la propriété de conservation de flot.
- La méthode de Ford-Fulkerson construit un flot en trouvant (par un parcours en largeur avec Edmonds-Karp) itérativement un chemin améliorant dans le graphe résiduel.
- De nombreux problèmes peuvent se ramener à un problème flot maximum comme celui de la coupe minimum (problème dual).

Prochaines échéances

- QCM à la prochaine séance de CM.
- Projet-tournoi : début la semaine du 14/4, à rendre la semaine du 26/5.
- DS 2 et épreuve TP : semaine du 26/5.
- Épreuve de seconde chance et restitution du projet-tournoi : semaine du 2/6.

Résumé

Contenu

- Le problème du flot maximum consiste à trouver une valeur de flot sur chaque arc en respectant les contraintes de capacité et la propriété de conservation de flot.
- La méthode de Ford-Fulkerson construit un flot en trouvant (par un parcours en largeur avec Edmonds-Karp) itérativement un chemin améliorant dans le graphe résiduel.
- De nombreux problèmes peuvent se ramener à un problème flot maximum comme celui de la coupe minimum (problème dual).

Prochaines échéances

- QCM à la prochaine séance de CM.
- Projet-tournoi : début la semaine du 14/4, à rendre la semaine du 26/5.
- DS 2 et épreuve TP : semaine du 26/5.
- Épreuve de seconde chance et restitution du projet-tournoi : semaine du 2/6.