Algorithme 2

Couplage dans un graphe biparti

Louis-Claude Canon
louis-claude.canon@univ-fcomte.fr

Licence 2 Informatique – Semestre 4

Plan

Plan

Couplage maximum dans un graphe biparti

Algorithme de Hopcroft-Karp (1973)

Problème des mariages stables

Conclusion

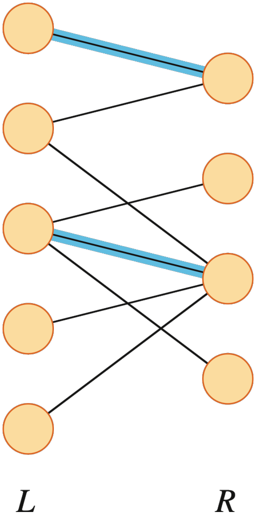
Définitions

- Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$, un *couplage* est un sous-ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ tel que pour tous les sommets $v \in V$, au plus une arête de M est incidente à v.
- Un *couplage maximum* est un couplage de cardinalité maximum : il n'existe pas de couplage qui possède davantage d'arêtes.
- Un *couplage maximal* est un couplage auquel on ne peut pas ajouter d'arête.
- Un graphe *biparti* est un graphe non orienté $G = (V, E)$ dans lequel V peut être partitionné en deux ensembles L et R tels que toutes les arêtes passent entre les deux ensembles L et R.
- Trouver un couplage maximum dans un graphe biparti peut servir à apparier des candidats à des offres d'emploi.

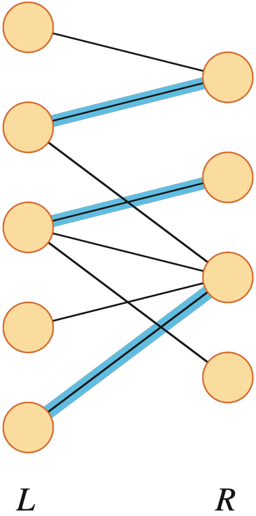
Définitions

- Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$, un *couplage* est un sous-ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ tel que pour tous les sommets $v \in V$, au plus une arête de M est incidente à v.
- Un *couplage maximum* est un couplage de cardinalité maximum : il n'existe pas de couplage qui possède davantage d'arêtes.
- Un *couplage maximal* est un couplage auquel on ne peut pas ajouter d'arête.
- Un graphe *biparti* est un graphe non orienté $G = (V, E)$ dans lequel V peut être partitionné en deux ensembles L et R tels que toutes les arêtes passent entre les deux ensembles L et R.
- Trouver un couplage maximum dans un graphe biparti peut servir à apparier des candidats à des offres d'emploi.

Exemple



Exemple



Définitions

- Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$, un *couplage* est un sous-ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ tel que pour tous les sommets $v \in V$, au plus une arête de M est incidente à v.
- Un *couplage maximum* est un couplage de cardinalité maximum : il n'existe pas de couplage qui possède davantage d'arêtes.
- Un *couplage maximal* est un couplage auquel on ne peut pas ajouter d'arête.
- Un graphe *biparti* est un graphe non orienté $G = (V, E)$ dans lequel V peut être partitionné en deux ensembles L et R tels que toutes les arêtes passent entre les deux ensembles L et R.
- Trouver un couplage maximum dans un graphe biparti peut servir à apparier des candidats à des offres d'emploi.

Définitions

- Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$, un *couplage* est un sous-ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ tel que pour tous les sommets $v \in V$, au plus une arête de M est incidente à v.
- Un *couplage maximum* est un couplage de cardinalité maximum : il n'existe pas de couplage qui possède davantage d'arêtes.
- Un *couplage maximal* est un couplage auquel on ne peut pas ajouter d'arête.
- Un graphe *biparti* est un graphe non orienté $G = (V, E)$ dans lequel V peut être partitionné en deux ensembles L et R tels que toutes les arêtes passent entre les deux ensembles L et R.
- Trouver un couplage maximum dans un graphe biparti peut servir à apparier des candidats à des offres d'emploi.

Définitions

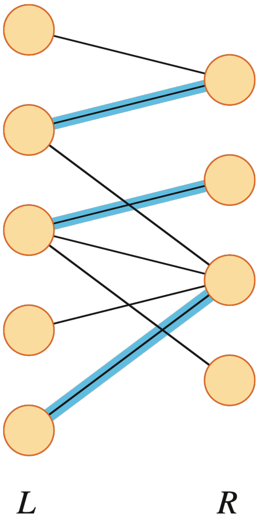
- Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$, un *couplage* est un sous-ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ tel que pour tous les sommets $v \in V$, au plus une arête de M est incidente à v.
- Un *couplage maximum* est un couplage de cardinalité maximum : il n'existe pas de couplage qui possède davantage d'arêtes.
- Un *couplage maximal* est un couplage auquel on ne peut pas ajouter d'arête.
- Un graphe *biparti* est un graphe non orienté $G = (V, E)$ dans lequel V peut être partitionné en deux ensembles L et R tels que toutes les arêtes passent entre les deux ensembles L et R.
- Trouver un couplage maximum dans un graphe biparti peut servir à apparier des candidats à des offres d'emploi.

Modélisation (flot maximum)

Pour trouver un couplage maximum dans un graphe biparti, on construit un réseau de transport à partir de ce graphe :

- on oriente les arêtes de L vers R avec une capacité $c(u, v) = 1$,
- on ajoute une source avant L,
- on ajoute un puits après R.

Les arêtes dont le flot est 1 sont dans un couplage maximum.

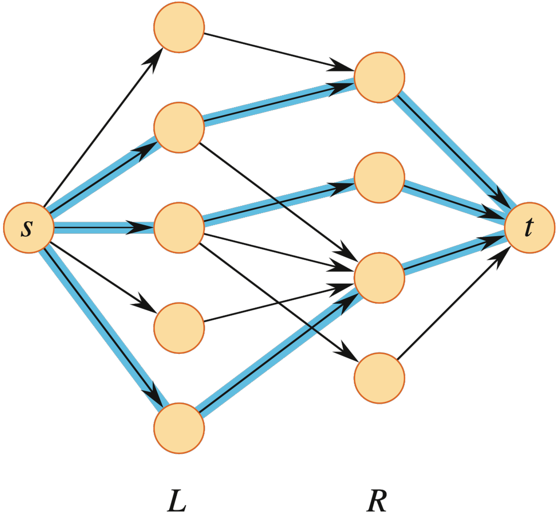


Modélisation (flot maximum)

Pour trouver un couplage maximum dans un graphe biparti, on construit un réseau de transport à partir de ce graphe :

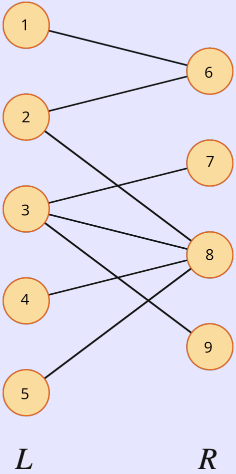
- on oriente les arêtes de L vers R avec une capacité $c(u, v) = 1$,
- on ajoute une source avant L,
- on ajoute un puits après R.

Les arêtes dont le flot est 1 sont dans un couplage maximum.



Question

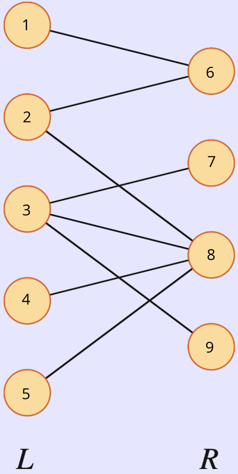
Quel est le couplage trouvé par l'algorithme de Edmonds-Karp sur le réseau de transport suivant ? On supposera que les sommets sont toujours considérés dans l'ordre numérique.



1. $\{(1,6),(2,8),(3,9)\}$
2. $\{(2,6),(3,7),(5,8)\}$
3. $\{(1,6),(3,7),(5,8)\}$
4. $\{(1,6),(2,8),(3,7)\}$

Question

Quel est le couplage trouvé par l'algorithme de Edmonds-Karp sur le réseau de transport suivant ? On supposera que les sommets sont toujours considérés dans l'ordre numérique.



1. $\{(1,6),(2,8),(3,9)\}$
2. $\{(2,6),(3,7),(5,8)\}$
3. $\{(1,6),(3,7),(5,8)\}$
4. $\{(1,6),(2,8),(3,7)\}$ ✓

Plan

Définition

- Complexité de l'algorithme d'Edmonds-Karp : $O(VE^2)$. On peut faire mieux.
- Comme pour le flot maximum, on utilise une notion similaire de chemin améliorant.
- Un *chemin améliorant* P pour un couplage M donné commence et termine par une arête qui n'est pas dans le couplage et alterne entre une arête du couplage et une autre qui n'y est pas.
- On construit un nouveau couplage à partir d'un chemin améliorant en utilisant l'opérateur de *différence symétrique* : $M \oplus P$ est l'ensemble des arêtes qui sont dans M ou P mais pas dans les deux $((M - P) \cup (P - M))$.
- Comme P alterne entre arêtes du couplage et autres arêtes, il s'agit en fait d'enlever certaines arêtes pour en mettre d'autres.
- Ça revient à "appliquer" le chemin améliorant sur le couplage.

Définition

- Complexité de l'algorithme d'Edmonds-Karp : $O(VE^2)$. On peut faire mieux.
- Comme pour le flot maximum, on utilise une notion similaire de chemin améliorant.
- Un *chemin améliorant* P pour un couplage M donné commence et termine par une arête qui n'est pas dans le couplage et alterne entre une arête du couplage et une autre qui n'y est pas.
- On construit un nouveau couplage à partir d'un chemin améliorant en utilisant l'opérateur de *différence symétrique* : $M \oplus P$ est l'ensemble des arêtes qui sont dans M ou P mais pas dans les deux ($(M - P) \cup (P - M)$).
- Comme P alterne entre arêtes du couplage et autres arêtes, il s'agit en fait d'enlever certaines arêtes pour en mettre d'autres.
- Ça revient à "appliquer" le chemin améliorant sur le couplage.

Définition

- Complexité de l'algorithme d'Edmonds-Karp : $O(VE^2)$. On peut faire mieux.
- Comme pour le flot maximum, on utilise une notion similaire de chemin améliorant.
- Un *chemin améliorant* P pour un couplage M donné commence et termine par une arête qui n'est pas dans le couplage et alterne entre une arête du couplage et une autre qui n'y est pas.
- On construit un nouveau couplage à partir d'un chemin améliorant en utilisant l'opérateur de *différence symétrique* : $M \oplus P$ est l'ensemble des arêtes qui sont dans M ou P mais pas dans les deux ($(M - P) \cup (P - M)$).
- Comme P alterne entre arêtes du couplage et autres arêtes, il s'agit en fait d'enlever certaines arêtes pour en mettre d'autres.
- Ça revient à "appliquer" le chemin améliorant sur le couplage.

Définition

- Complexité de l'algorithme d'Edmonds-Karp : $O(VE^2)$. On peut faire mieux.
- Comme pour le flot maximum, on utilise une notion similaire de chemin améliorant.
- Un *chemin améliorant* P pour un couplage M donné commence et termine par une arête qui n'est pas dans le couplage et alterne entre une arête du couplage et une autre qui n'y est pas.
- On construit un nouveau couplage à partir d'un chemin améliorant en utilisant l'opérateur de *différence symétrique* : $M \oplus P$ est l'ensemble des arêtes qui sont dans M ou P mais pas dans les deux ($(M - P) \cup (P - M)$).
- Comme P alterne entre arêtes du couplage et autres arêtes, il s'agit en fait d'enlever certaines arêtes pour en mettre d'autres.
- Ça revient à "appliquer" le chemin améliorant sur le couplage.

Définition

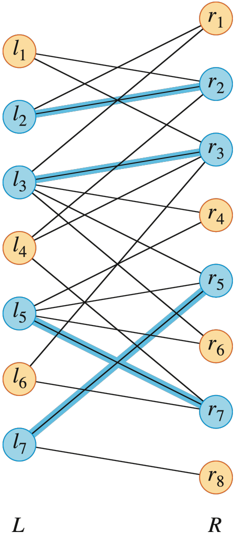
- Complexité de l'algorithme d'Edmonds-Karp : $O(VE^2)$. On peut faire mieux.
- Comme pour le flot maximum, on utilise une notion similaire de chemin améliorant.
- Un *chemin améliorant* P pour un couplage M donné commence et termine par une arête qui n'est pas dans le couplage et alterne entre une arête du couplage et une autre qui n'y est pas.
- On construit un nouveau couplage à partir d'un chemin améliorant en utilisant l'opérateur de *différence symétrique* : $M \oplus P$ est l'ensemble des arêtes qui sont dans M ou P mais pas dans les deux ($(M - P) \cup (P - M)$).
- Comme P alterne entre arêtes du couplage et autres arêtes, il s'agit en fait d'enlever certaines arêtes pour en mettre d'autres.
- Ça revient à "appliquer" le chemin améliorant sur le couplage.

Définition

- Complexité de l'algorithme d'Edmonds-Karp : $O(VE^2)$. On peut faire mieux.
- Comme pour le flot maximum, on utilise une notion similaire de chemin améliorant.
- Un *chemin améliorant* P pour un couplage M donné commence et termine par une arête qui n'est pas dans le couplage et alterne entre une arête du couplage et une autre qui n'y est pas.
- On construit un nouveau couplage à partir d'un chemin améliorant en utilisant l'opérateur de *différence symétrique* : $M \oplus P$ est l'ensemble des arêtes qui sont dans M ou P mais pas dans les deux ($(M - P) \cup (P - M)$).
- Comme P alterne entre arêtes du couplage et autres arêtes, il s'agit en fait d'enlever certaines arêtes pour en mettre d'autres.
- Ça revient à “appliquer” le chemin améliorant sur le couplage.

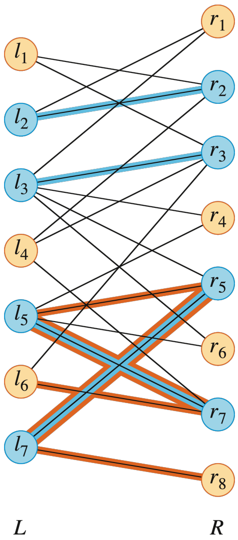
Exemples de couplage

- Le couplage $M = \{(l_2, r_2), (l_3, r_3), (l_5, r_7), (l_7, r_5)\}$ n'est pas maximum.
- Le chemin améliorant $P = \{(l_6, r_7), (r_7, l_5), (l_5, r_5), (r_5, l_7), (l_7, r_8)\}$ commence et termine par un sommet qui n'est pas dans le couplage M et alterne entre une arête du couplage et une autre.
- Le couplage $M \oplus P$ a une arête de plus mais n'est toujours pas maximum.



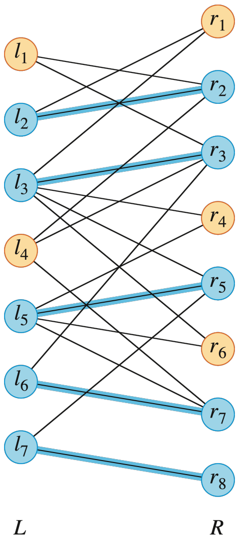
Exemples de couplage

- Le couplage $M = \{(l_2, r_2), (l_3, r_3), (l_5, r_7), (l_7, r_5)\}$ n'est pas maximum.
- Le chemin améliorant $P = \{(l_6, r_7), (r_7, l_5), (l_5, r_5), (r_5, l_7), (l_7, r_8)\}$ commence et termine par un sommet qui n'est pas dans le couplage M et alterne entre une arête du couplage et une autre.
- Le couplage $M \oplus P$ a une arête de plus mais n'est toujours pas maximum.



Exemples de couplage

- Le couplage $M = \{(l_2, r_2), (l_3, r_3), (l_5, r_7), (l_7, r_5)\}$ n'est pas maximum.
- Le chemin améliorant $P = \{(l_6, r_7), (r_7, l_5), (l_5, r_5), (r_5, l_7), (l_7, r_8)\}$ commence et termine par un sommet qui n'est pas dans le couplage M et alterne entre une arête du couplage et une autre.
- Le couplage $M \oplus P$ a une arête de plus mais n'est toujours pas maximum.



Explication de Hopcroft-Karp

- L'algorithme cherche des chemins améliorants et les applique itérativement (même principe qu'avec Ford-Fulkerson).
- Pour être efficace, l'algorithme regroupe les chemins améliorants dans un ensemble pour les traiter d'un seul coup.
- Dans un ensemble de chemins améliorants, il faut qu'ils aient tous des sommets disjoints et la même longueur, la plus petite possible.

Pseudo-code de Hopcroft-Karp

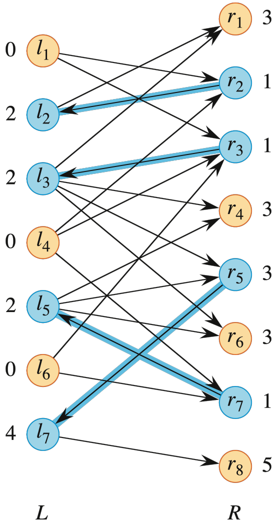
Hopcroft-Karp(G)

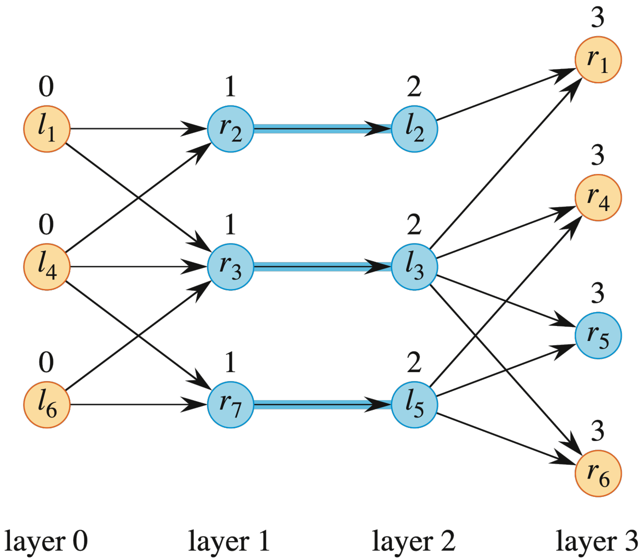
$M \leftarrow \emptyset$
faire
  $\mathcal{P} \leftarrow \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ ensemble maximal de chemins améliorants sans sommets communs et de longueur minimale
  $M \leftarrow M \oplus (P_1 \cup P_2 \cup \cdots, P_k)$
jusqu'à $\mathcal{P} = \emptyset$
retourner M

Ensemble maximal de chemins améliorants

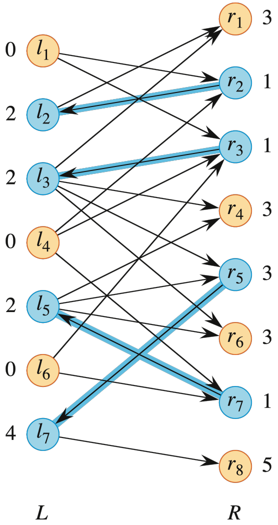
- Il reste à identifier un ensemble maximal de chemins améliorants.
- Un ensemble est maximal si on ne peut pas lui rajouter de chemins améliorants.
- L'approche s'appuie sur un parcours en largeur, puis un parcours en profondeur :
  1. On oriente les arêtes : de R vers L si elles sont dans M, l'inverse sinon.
  2. On réalise un parcours en largeur à partir de tous les sommets de L qui ne sont pas dans M. On explore largeur par largeur jusqu'à celle qui atteint un sommet qui n'est pas dans M.
  3. On réalise un parcours en profondeur à partir des sommets de la dernière largeur en remontant vers les sommets de L.

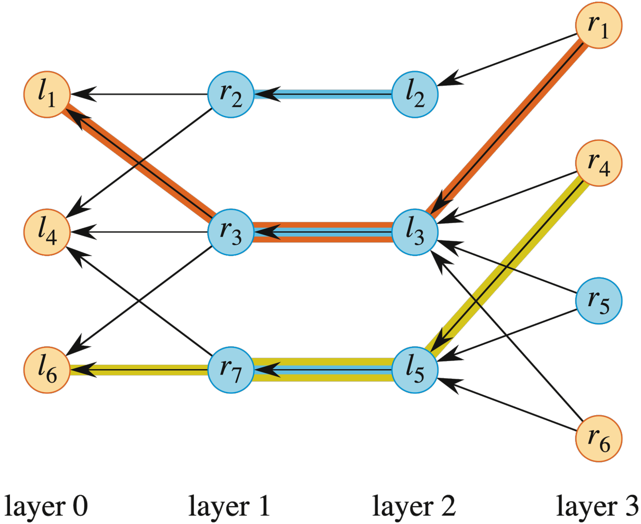
Exemple de chemins améliorants



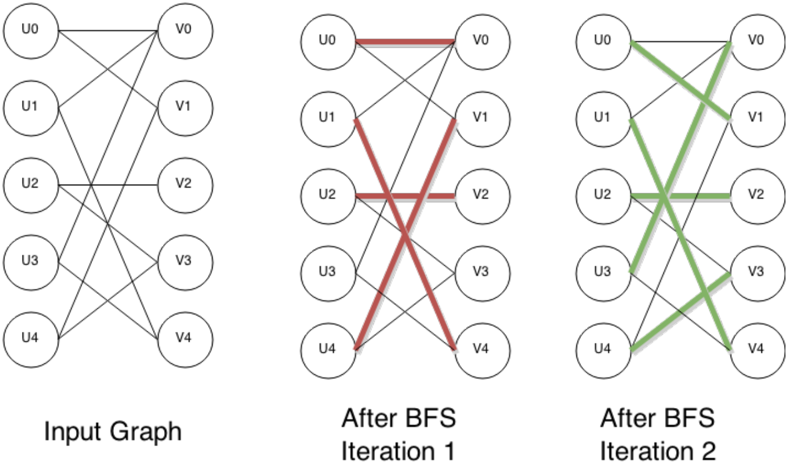


Exemple de chemins améliorants





Déroulement de l'algorithme



- Itération 1 : $\{(U_0, V_0)\}$, $\{(U_1, V_4)\}$, $\{(U_2, V_2)\}$ et $\{(U_4, V_1)\}$.
- Itération 2 : $\{(U_3, V_0), (V_0, U_0), (U_0, V_1), (V_1, U_4), (U_4, V_3)\}$.

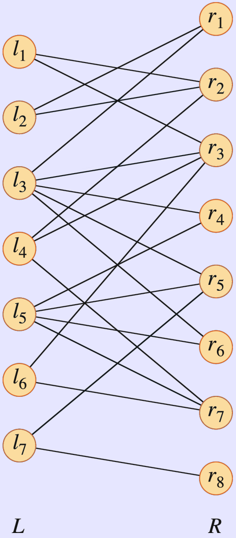
Analyse de complexité

- Pour chaque itération :
  - Orienter les arêtes : $O(E)$.
  - Parcours en largeur à partir de plusieurs origines : $O(E)$.
  - Parcours en profondeur à partir de plusieurs origines : $O(E)$.
  - Différence symétrique avec les chemins améliorants : $O(E)$ car les arêtes sont toutes disjointes.
- Une itération prend donc un temps $O(E)$.
- Comme il y a $\sqrt{V}$ itérations (résultat admis), la complexité en temps est $O(\sqrt{V}E)$.

Question

Quelle arête n'est pas présente dans le couplage maximum calculé avec l'algorithme de Hopcroft-Karp sur le graphe suivant ? On supposera que les sommets sont toujours considérés dans l'ordre naturel.

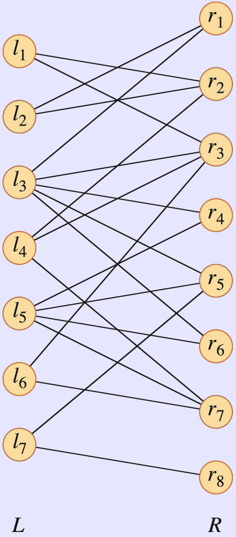
1. (l_3, r_3)
2. (l_5, r_4)
3. (l_6, r_3)
4. (l_7, r_5)



Question

Quelle arête n'est pas présente dans le couplage maximum calculé avec l'algorithme de Hopcroft-Karp sur le graphe suivant ? On supposera que les sommets sont toujours considérés dans l'ordre naturel.

1. (l_3, r_3) ✓
2. (l_5, r_4)
3. (l_6, r_3)
4. (l_7, r_5)



Correction

Itération 1 :

- On oriente toutes les arêtes vers la droite.
- On réalise un parcours en largeur à partir de tous les sommets gauches et on s'arrête sur tous les sommets de droite qui sont tous à une distance 1.
- On réalise un parcours en profondeur à partir des sommets de droite :
  - r_1 se lie à l_2.
  - r_2 se lie à l_1.
  - r_3 se lie à l_3.
  - r_4 se lie à l_5.
  - r_5 se lie à l_7.
  - r_6 ne se lie à aucun sommet.
  - r_7 se lie à l_4.
  - r_8 ne se lie à aucun sommet.

Itération 2 :

- On réalise un parcours en largeur à partir de l_6. On s'arrête à une distance 3 : $(l_6, r_3), (r_3, l_3), (l_3, r_6)$. Il existe un chemin jusqu'à r_8, mais il est plus long.
- On réalise la différence symétrique et on obtient ce couplage : (l_1, r_2), (l_2, r_1), (l_3, r_6), (l_4, r_7), (l_5, r_4), (l_6, r_3) et (l_7, r_5).

Plan

Contexte et définitions

- Au lieu de relations binaires entre les sommets de gauches et ceux de droites (arête présente ou absente), on considère des classements : chaque sommet de gauche classe les sommets de droite par préférence et vice-et-versa.
- L'exemple traditionnel est celui des mariages entre des femmes et des hommes.
- On retrouve aussi cette situation avec APB (Admission Post-Bac), le prédécesseur de Parcoursup : chaque candidat fournit des choix triés par préférence et les établissements aussi.
- On souhaite obtenir un couplage qui soit *stable* : il n'existe pas une femme et un homme qui préférerait tous les deux être ensemble plutôt qu'avec leurs partenaires actuels.
- Le problème des *marriages stables* consiste à trouver un tel couplage.

Contexte et définitions

- Au lieu de relations binaires entre les sommets de gauches et ceux de droites (arête présente ou absente), on considère des classements : chaque sommet de gauche classe les sommets de droite par préférence et vice-et-versa.
- L'exemple traditionnel est celui des mariages entre des femmes et des hommes.
- On retrouve aussi cette situation avec APB (Admission Post-Bac), le prédécesseur de Parcoursup : chaque candidat fournit des choix triés par préférence et les établissements aussi.
- On souhaite obtenir un couplage qui soit *stable* : il n'existe pas une femme et un homme qui préférerait tous les deux être ensemble plutôt qu'avec leurs partenaires actuels.
- Le problème des *marriages stables* consiste à trouver un tel couplage.

Contexte et définitions

- Au lieu de relations binaires entre les sommets de gauches et ceux de droites (arête présente ou absente), on considère des classements : chaque sommet de gauche classe les sommets de droite par préférence et vice-et-versa.
- L'exemple traditionnel est celui des mariages entre des femmes et des hommes.
- On retrouve aussi cette situation avec APB (Admission Post-Bac), le prédécesseur de Parcoursup : chaque candidat fournit des choix triés par préférence et les établissements aussi.
- On souhaite obtenir un couplage qui soit *stable* : il n'existe pas une femme et un homme qui préférerait tous les deux être ensemble plutôt qu'avec leurs partenaires actuels.
- Le problème des *marriages stables* consiste à trouver un tel couplage.

Contexte et définitions

- Au lieu de relations binaires entre les sommets de gauches et ceux de droites (arête présente ou absente), on considère des classements : chaque sommet de gauche classe les sommets de droite par préférence et vice-et-versa.
- L'exemple traditionnel est celui des mariages entre des femmes et des hommes.
- On retrouve aussi cette situation avec APB (Admission Post-Bac), le prédécesseur de Parcoursup : chaque candidat fournit des choix triés par préférence et les établissements aussi.
- On souhaite obtenir un couplage qui soit *stable* : il n'existe pas une femme et un homme qui préférerait tous les deux être ensemble plutôt qu'avec leurs partenaires actuels.
- Le problème des *marriages stables* consiste à trouver un tel couplage.

Contexte et définitions

- Au lieu de relations binaires entre les sommets de gauches et ceux de droites (arête présente ou absente), on considère des classements : chaque sommet de gauche classe les sommets de droite par préférence et vice-et-versa.
- L'exemple traditionnel est celui des mariages entre des femmes et des hommes.
- On retrouve aussi cette situation avec APB (Admission Post-Bac), le prédécesseur de Parcoursup : chaque candidat fournit des choix triés par préférence et les établissements aussi.
- On souhaite obtenir un couplage qui soit *stable* : il n'existe pas une femme et un homme qui préférerait tous les deux être ensemble plutôt qu'avec leurs partenaires actuels.
- Le problème des *marriages stables* consiste à trouver un tel couplage.

Exemples de mariage stable

Préférences :

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3
Monica	Chandler	Joey	Ross
Phoebe	Joey	Ross	Chandler
Rachel	Ross	Chandler	Joey

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3
Chandler	Phoebe	Rachel	Monica
Joey	Rachel	Monica	Phoebe
Ross	Monica	Phoebe	Rachel

Couplages stables :

Monica/Chandler
Phoebe/Joey
Rachel/Ross

Rachel/Chandler
Monica/Joey
Phoebe/Ross

Phoebe/Chandler
Rachel/Joey
Monica/Ross

Exemples de mariage stable

Préférences :

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3
Monica	Chandler	Joey	Ross
Phoebe	Joey	Ross	Chandler
Rachel	Ross	Chandler	Joey

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3
Chandler	Phoebe	Rachel	Monica
Joey	Rachel	Monica	Phoebe
Ross	Monica	Phoebe	Rachel

Couplages stables :

Monica/Chandler
Phoebe/Joey
Rachel/Ross

Rachel/Chandler
Monica/Joey
Phoebe/Ross

Phoebe/Chandler
Rachel/Joey
Monica/Ross

Explication de Gale-Shapley

- Initialement, le couplage est vide : chaque personne est marquée en tant que *libre*.
- On procède par itération pour construire le couplage.
- Au départ, on réalise des engagements provisoires en prenant les premiers choix des premières femmes.
- En cas de concurrence, on pourra revenir sur un engagement en considérant la préférence de l'homme.
- On itère jusqu'à ce que chaque femme soit engagée.
- L'algorithme produit un mariage stable (celui qui favorise les femmes).

Pseudo-code de Gale-Shapley

```
GALE-SHAPLEY(hommes, femmes, préférences)
initialiser chaque homme et chaque femme à libre
tant que une femme w est libre faire
   soit m le premier homme sur la liste de w a qui elle n'a encore rien proposé
   si m est libre alors
      w et m s'engagent et ne sont plus libre
   sinon si m préfère w à w' avec qui il est déjà engagé alors
      w' devient libre
      w et m s'engagent et ne sont plus libre
   sinon
      w reste libre
retourner les mariages stables obtenus
```

Exemple

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Wanda	Brent	Hank	Oscar	Davis
Emma	Davis	Hank	Oscar	Brent
Lacey	Brent	Davis	Hank	Oscar
Karen	Brent	Hank	Davis	Oscar

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Oscar	Wanda	Karen	Lacey	Emma
Davis	Wanda	Lacey	Karen	Emma
Brent	Lacey	Karen	Wanda	Emma
Hank	Lacey	Wanda	Emma	Karen

1. Wanda → Brent ✓(WB)
2. Emma → Davis ✓(WB, ED)
3. Lacey → Brent ✓(ED, LB)
4. Karen → Brent ✗(ED, LB)
5. Karen → Hank ✓(ED, LB, KH)
6. Wanda → Hank ✓(ED, LB, WH)
7. Karen → Davis ✓(LB, WH, KD)
8. Emma → Hank ✗(LB, WH, KD)
9. Emma → Oscar ✓(LB, WH, KD, EO)

Exemple

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Wanda	Brent	Hank	Oscar	Davis
Emma	Davis	Hank	Oscar	Brent
Lacey	Brent	Davis	Hank	Oscar
Karen	Brent	Hank	Davis	Oscar

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Oscar	Wanda	Karen	Lacey	Emma
Davis	Wanda	Lacey	Karen	Emma
Brent	Lacey	Karen	Wanda	Emma
Hank	Lacey	Wanda	Emma	Karen

1. Wanda → Brent ✓(WB)
2. Emma → Davis ✓(WB, ED)
3. Lacey → Brent ✓(ED, LB)
4. Karen → Brent ✗(ED, LB)
5. Karen → Hank ✓(ED, LB, KH)
6. Wanda → Hank ✓(ED, LB, WH)
7. Karen → Davis ✓(LB, WH, KD)
8. Emma → Hank ✗(LB, WH, KD)
9. Emma → Oscar ✓(LB, WH, KD, EO)

Exemple

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Wanda	Brent	Hank	Oscar	Davis
Emma	Davis	Hank	Oscar	Brent
Lacey	Brent	Davis	Hank	Oscar
Karen	Brent	Hank	Davis	Oscar

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Oscar	Wanda	Karen	Lacey	Emma
Davis	Wanda	Lacey	Karen	Emma
Brent	Lacey	Karen	Wanda	Emma
Hank	Lacey	Wanda	Emma	Karen

1. Wanda $\rightarrow$ Brent ✓(WB)
2. Emma $\rightarrow$ Davis ✓(WB, ED)
3. Lacey $\rightarrow$ Brent ✓(ED, LB)
4. Karen $\rightarrow$ Brent ✗(ED, LB)
5. Karen $\rightarrow$ Hank ✓(ED, LB, KH)
6. Wanda $\rightarrow$ Hank ✓(ED, LB, WH)
7. Karen $\rightarrow$ Davis ✓(LB, WH, KD)
8. Emma $\rightarrow$ Hank ✗(LB, WH, KD)
9. Emma $\rightarrow$ Oscar ✓(LB, WH, KD, EO)

Exemple

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Wanda	Brent	Hank	Oscar	Davis
Emma	Davis	Hank	Oscar	Brent
Lacey	Brent	Davis	Hank	Oscar
Karen	Brent	Hank	Davis	Oscar

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Oscar	Wanda	Karen	Lacey	Emma
Davis	Wanda	Lacey	Karen	Emma
Brent	Lacey	Karen	Wanda	Emma
Hank	Lacey	Wanda	Emma	Karen

1. Wanda → Brent ✓(WB)
2. Emma → Davis ✓(WB, ED)
3. Lacey → Brent ✓(ED, LB)
4. Karen → Brent ✗(ED, LB)
5. Karen → Hank ✓(ED, LB, KH)
6. Wanda → Hank ✓(ED, LB, WH)
7. Karen → Davis ✓(LB, WH, KD)
8. Emma → Hank ✗(LB, WH, KD)
9. Emma → Oscar ✓(LB, WH, KD, EO)

Exemple

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Wanda	Brent	Hank	Oscar	Davis
Emma	Davis	Hank	Oscar	Brent
Lacey	Brent	Davis	Hank	Oscar
Karen	Brent	Hank	Davis	Oscar

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Oscar	Wanda	Karen	Lacey	Emma
Davis	Wanda	Lacey	Karen	Emma
Brent	Lacey	Karen	Wanda	Emma
Hank	Lacey	Wanda	Emma	Karen

1. Wanda → Brent ✓(WB)
2. Emma → Davis ✓(WB, ED)
3. Lacey → Brent ✓(ED, LB)
4. Karen → Brent ✗(ED, LB)
5. Karen → Hank ✓(ED, LB, KH)
6. Wanda → Hank ✓(ED, LB, WH)
7. Karen → Davis ✓(LB, WH, KD)
8. Emma → Hank ✗(LB, WH, KD)
9. Emma → Oscar ✓(LB, WH, KD, EO)

Exemple

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Wanda	Brent	Hank	Oscar	Davis
Emma	Davis	Hank	Oscar	Brent
Lacey	Brent	Davis	Hank	Oscar
Karen	Brent	Hank	Davis	Oscar

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Oscar	Wanda	Karen	Lacey	Emma
Davis	Wanda	Lacey	Karen	Emma
Brent	Lacey	Karen	Wanda	Emma
Hank	Lacey	Wanda	Emma	Karen

1. Wanda → Brent ✓(WB)
2. Emma → Davis ✓(WB, ED)
3. Lacey → Brent ✓(ED, LB)
4. Karen → Brent ✗(ED, LB)
5. Karen → Hank ✓(ED, LB, KH)
6. Wanda → Hank ✓(ED, LB, WH)
7. Karen → Davis ✓(LB, WH, KD)
8. Emma → Hank ✗(LB, WH, KD)
9. Emma → Oscar ✓(LB, WH, KD, EO)

Exemple

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Wanda	Brent	Hank	Oscar	Davis
Emma	Davis	Hank	Oscar	Brent
Lacey	Brent	Davis	Hank	Oscar
Karen	Brent	Hank	Davis	Oscar

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Oscar	Wanda	Karen	Lacey	Emma
Davis	Wanda	Lacey	Karen	Emma
Brent	Lacey	Karen	Wanda	Emma
Hank	Lacey	Wanda	Emma	Karen

1. Wanda → Brent ✓(WB)
2. Emma → Davis ✓(WB, ED)
3. Lacey → Brent ✓(ED, LB)
4. Karen → Brent ✗(ED, LB)
5. Karen → Hank ✓(ED, LB, KH)
6. Wanda → Hank ✓(ED, LB, WH)
7. Karen → Davis ✓(LB, WH, KD)
8. Emma → Hank ✗(LB, WH, KD)
9. Emma → Oscar ✓(LB, WH, KD, EO)

Exemple

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Wanda	Brent	Hank	Oscar	Davis
Emma	Davis	Hank	Oscar	Brent
Lacey	Brent	Davis	Hank	Oscar
Karen	Brent	Hank	Davis	Oscar

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Oscar	Wanda	Karen	Lacey	Emma
Davis	Wanda	Lacey	Karen	Emma
Brent	Lacey	Karen	Wanda	Emma
Hank	Lacey	Wanda	Emma	Karen

1. Wanda → Brent ✓(WB)
2. Emma → Davis ✓(WB, ED)
3. Lacey → Brent ✓(ED, LB)
4. Karen → Brent ✗(ED, LB)
5. Karen → Hank ✓(ED, LB, KH)
6. Wanda → Hank ✓(ED, LB, WH)
7. Karen → Davis ✓(LB, WH, KD)
8. Emma → Hank ✗(LB, WH, KD)
9. Emma → Oscar ✓(LB, WH, KD, EO)

Exemple

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Wanda	Brent	Hank	Oscar	Davis
Emma	Davis	Hank	Oscar	Brent
Lacey	Brent	Davis	Hank	Oscar
Karen	Brent	Hank	Davis	Oscar

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Oscar	Wanda	Karen	Lacey	Emma
Davis	Wanda	Lacey	Karen	Emma
Brent	Lacey	Karen	Wanda	Emma
Hank	Lacey	Wanda	Emma	Karen

1. Wanda → Brent ✓(WB)
2. Emma → Davis ✓(WB, ED)
3. Lacey → Brent ✓(ED, LB)
4. Karen → Brent ✗(ED, LB)
5. Karen → Hank ✓(ED, LB, KH)
6. Wanda → Hank ✓(ED, LB, WH)
7. Karen → Davis ✓(LB, WH, KD)
8. Emma → Hank ✗(LB, WH, KD)
9. Emma → Oscar ✓(LB, WH, KD, EO)

Preuve de validité (invariant)

Invariant de boucle Au début de chaque itération, les engagements forment un couplage stable si on se limite aux personnes engagés (il n'y a pas de paire de personnes qui se préféreraient mutuellement plutôt que leurs partenaires actuels).

Initialisation Couplage vide donc stable.

Conservation Analyse des 3 cas.

Terminaison À la fin, tout le monde est engagé et le couplage est donc stable pour tout le monde.

Preuve de validité (invariant)

Invariant de boucle Au début de chaque itération, les engagements forment un couplage stable si on se limite aux personnes engagés (il n'y a pas de paire de personnes qui se préféreraient mutuellement plutôt que leurs partenaires actuels).

Initialisation Couplage vide donc stable.

Conservation Analyse des 3 cas.

Terminaison À la fin, tout le monde est engagé et le couplage est donc stable pour tout le monde.

Preuve de validité (invariant)

Invariant de boucle Au début de chaque itération, les engagements forment un couplage stable si on se limite aux personnes engagés (il n'y a pas de paire de personnes qui se préféreraient mutuellement plutôt que leurs partenaires actuels).

Initialisation Couplage vide donc stable.

Conservation Analyse des 3 cas.

Terminaison À la fin, tout le monde est engagé et le couplage est donc stable pour tout le monde.

Preuve de validité (invariant)

Invariant de boucle Au début de chaque itération, les engagements forment un couplage stable si on se limite aux personnes engagés (il n'y a pas de paire de personnes qui se préféreraient mutuellement plutôt que leurs partenaires actuels).

Initialisation Couplage vide donc stable.

Conservation Analyse des 3 cas.

Terminaison À la fin, tout le monde est engagé et le couplage est donc stable pour tout le monde.

Analyse de complexité

- Dans le pire des cas, on parcours toutes les préférences : il y a donc $O(V^2)$ itérations.
- Chaque itération prend un temps $O(V)$ pour déterminer si m préfère w à w' avec une implémentation triviale, mais peut se faire en $O(1)$.
- La complexité en temps est donc $O(V^2)$.

Question

Quel couple est obtenu si on lance l'algorithme de GALE-SHAPLEY en priorisant les hommes ?

1. Brent et Karen
2. Davis et Wanda
3. Hank et Lacey
4. Oscar et Emma

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Wanda	Brent	Hank	Oscar	Davis
Emma	Davis	Hank	Oscar	Brent
Lacey	Brent	Davis	Hank	Oscar
Karen	Brent	Hank	Davis	Oscar

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Oscar	Wanda	Karen	Lacey	Emma
Davis	Wanda	Lacey	Karen	Emma
Brent	Lacey	Karen	Wanda	Emma
Hank	Lacey	Wanda	Emma	Karen

Question

Quel couple est obtenu si on lance l'algorithme de Gale-Shapley en priorisant les hommes ?

1. Brent et Karen
2. Davis et Wanda
3. Hank et Lacey
4. Oscar et Emma ✓

Femmes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Wanda	Brent	Hank	Oscar	Davis
Emma	Davis	Hank	Oscar	Brent
Lacey	Brent	Davis	Hank	Oscar
Karen	Brent	Hank	Davis	Oscar

Hommes	Choix 1	Choix 2	Choix 3	Choix 4
Oscar	Wanda	Karen	Lacey	Emma
Davis	Wanda	Lacey	Karen	Emma
Brent	Lacey	Karen	Wanda	Emma
Hank	Lacey	Wanda	Emma	Karen

Plan

Résumé

Contenu

- Les problèmes de couplage consistent à apparier des sommets entre eux.
- Dans un graphe biparti, on peut se ramener à un problème de flot maximum et appliquer l'algorithme de Edmonds-Karp ou appliquer directement l'algorithme de Hopcroft-Karp.
- Le problème des mariages stables est un problème de couplage avec des préférences qui se résout avec l'algorithme de Gale-Shapley.