TD Algo2 – session 10 – Flot maximum

28 mai 2025

Objectifs d'apprentissage :
— analyser les propriétés formelles liées au flot dans les réseaux de transport ;
— modéliser des problèmes en problème de flot maximum (ou les y réduire) ;
— concevoir des algorithmes relatifs à ce problème ;

Exercice 1 : Séparation d'arc

Montrer que séparer un arc en deux dans un réseau de transport produit un réseau équivalent. Plus formellement, supposons qu'un réseau de transport G contienne l'arc (u, v). On définit un nouveau réseau de transport G' avec un nouveau sommet x et on y remplace (u, v) par deux arcs (u, x) et (x, v) avec $c(u, x) = c(x, v) = c(u, v)$. Argumenter que le flot maximum de G' a la même valeur que celui de G.

Exercice 2 : Somme des flots

Étant donné un réseau de transport $G = (V, E)$, soient f_1 et f_2 deux fonctions de $V \times V$ vers $\mathbb{R}$. La somme des flots $f_1 + f_2$ est la fonction de $V \times V$ vers $\mathbb{R}$ définie par $(f_1 + f_2)(u, v) = f_1(u, v) + f_2(u, v)$ pour tout $u, v \in V$. Si f_1 et f_2 sont des flots de G, laquelle des deux propriétés de flot la somme de flots $f_1 + f_2$ doit-elle satisfaire et laquelle pourrait-elle violer ?

Exercice 3 : Produit scalaire des flots

Soit f un flot dans un réseau et soit α un nombre réel. Le produit scalaire des flots αf est une fonction de $V \times V$ vers $\mathbb{R}$ définie par $(\alpha f)(u, v) = \alpha f(u, v)$. Montrer que, si f_1 et f_2 sont deux flots, alors $\alpha f_1 + (1 - \alpha) f_2$ est aussi un flot pour tout α dans l'intervalle $0 \leq \alpha \leq 1$.

Exercice 4 : Capacité sur les sommets

Supposons qu'en plus de la contrainte de capacité sur les arcs, il y ait également une contrainte de capacité sur les sommets. Chaque sommet v aurait une limite $l(v)$ sur la quantité maximum de flot qui peut traverser v. Montrer comment transformer un réseau de transport $G = (V, E)$ avec des capacités sur les sommets en un réseau de transport équivalent $G' = (V', E')$ sans capacité sur les sommets et tel que le flot maximum de G' est le même que celui de G. Combien de sommets et d'arcs possède G' ?

Exercice 5 : Distanciation

Le professeur Adam a deux enfants qui, hélas, se détestent. Ils se haïssent à tel point que chacun refuse d'aller à l'école en empruntant un trottoir sur lequel l'autre a marché le jour même. Les enfants ne font pas de difficultés si leurs chemins se croisent à un coin de rue. Heureusement, la maison du professeur et l'école sont situées à des coins de rue ; à part cela, le professeur ne sait pas s'il pourra envoyer ses deux enfants à la même école. Le professeur a un plan de la ville. Montrer comment formuler en tant que problème de flot maximum le problème consistant à savoir si les deux enfants pourront aller à la même école.

Exercice 6 : Coupe minimum

Supposons que l'on souhaite trouver, parmi toutes les coupes minimums dans un réseau de transport G, celle qui contiennent le plus petit nombre d'arcs. Montrer comment modifier les capacités de G pour créer un nouveau réseau de transport G' tel que la coupe minimum soit une coupe minimum avec le plus petit nombre d'arcs dans G.

Exercice 7 : Connectivité

La connectivité d'arête d'un graphe non orienté est le nombre minimal k d'arêtes qu'il faut supprimer pour que le graphe ne soit plus connexe. Par exemple, la connectivité d'arête d'un arbre est 1 et celle d'un cycle de sommets est 2. Montrer comment déterminer la connectivité d'arête d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ en exécutant un algorithme de flot maximum sur au plus $|V|$ réseaux de transport, comportant chacun $O(V)$ sommets et $O(E)$ arcs.

Exercice 8 : Réentrant

Soit un réseau de transport G, où G contient des arcs entrants dans la source s. Soit f un flot dans G avec $|f| \geq 0$ dans lequel l'un des arcs (v, s) entrant dans la source a $f(v, s) = 1$. Prouver qu'il existe un autre flot f' avec $f'(v, s) = 0$ tel que $|f| = |f'|$. Donner un algorithme en temps $O(E)$ pour calculer f', étant donné f.

Exercice 9 : Chemins améliorants

Montrer qu'on peut toujours trouver un flot maximum dans un réseau $G = (V, E)$ à l'aide d'une séquence d'au plus $|E|$ chemins améliorants. (Conseil : Déterminer les chemins après avoir trouvé le flot maximum.)

Exercice 10 : Flots fixés

Supposons que chaque source s_i d'un problème à sources et puits multiples produise au plus p_i unités de flot, de sorte que $f(s_i, S) = p_i$. Supposons par ailleurs que chaque puits t_j consomme au plus q_j unités de flot, de sorte que $f(V, t_j) = q_j$, où $\sum_i p_i = \sum_j q_j$. Montrer comment convertir le problème consistant à trouver un flot f qui respecte ces contraintes supplémentaires en un problème consistant à trouver un flot maximum dans un réseau de transport à source et puits uniques.

Exercice 11 : Majorant

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti ayant la partition de sommets $S = L \cup R$, et soit G' son réseau de transport correspondant. Donner un bon majorant de la longueur d'un chemin améliorant quelconque trouvé dans G' pendant l'exécution de FORD-FULKERSON.

Exercice 12 : Intégralité

Démontrer le théorème de l'intégralité par récurrence sur le nombre d'itérations.