

# TD Algo2 – session 4 – Arbres rouge-noir

12 mars 2025

Objectifs d'apprentissage :

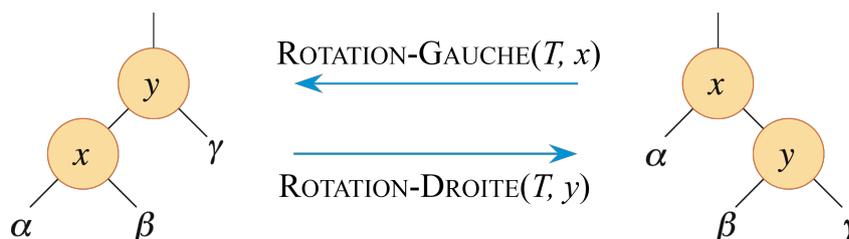
- manipuler et étudier l'opération de rotation et concevoir des algorithmes relatifs;
- manipuler la structure d'arbre rouge-noir et étudier les implications des propriétés de ce type d'arbres;

## Exercice 1 : Insertion

On considère ce qui se passe lorsqu'un arbre rouge-noir est construit en insérant des clés dans l'ordre croissant et on s'intéresse au nombre de rotations réalisées. Déterminer, en l'argumentant, un nombre maximal de rotations réalisées pour l'insertion de  $n$  clés. La borne n'a pas besoin d'être précise à un facteur constant près.

## Exercice 2 : Rotation droite

Écrire le pseudo code de ROTATION-DROITE.



## Exercice 3 : Rotations possibles

Argumenter que, dans tout arbre binaire de recherche à  $n$  nœuds, il existe exactement  $n - 1$  rotations possibles.

## Exercice 4 : Transformation

On cherche un algorithme pour transformer tout arbre binaire de recherche à  $n$  nœuds en n'importe quel autre arbre binaire de recherche à  $n$  nœuds. Quelle est la complexité en temps de l'algorithme? (Conseil : commencer par identifier comment réaliser  $n - 1$  rotations droites pour transformer l'arbre en une chaîne orientée vers la droite.)

## Exercice 5 : Coloriage

Dessiner l'arbre binaire de recherche complet de hauteur 3 contenant les clés  $1, 2, \dots, 15$ . Ajouter les feuilles NIL et colorier les nœuds de trois manières différentes, de telle façon que les hauteurs noires des arbres rouge-noir résultants soient 2, 3 et 4.

## Exercice 6 : Hauteur

Argumenter que le chemin simple le plus long reliant un nœud  $x$  d'un arbre rouge-noir à une feuille a une longueur qui est au plus égale à deux fois celle du plus court chemin simple reliant le nœud  $x$  à une feuille.

## Exercice 7 : Extrêmes

Quel est le plus grand nombre possible de nœuds internes d'un arbre rouge-noir de hauteur noire  $k$ ? Quel est le plus petit nombre possible?

## Exercice 8 : Nœud rouge

Soit un arbre rouge-noir formé par l'insertion de  $n$  nœuds via RN-INSÉRER. Argumenter que, si  $n > 1$ , l'arbre a au moins un nœud rouge.

**Exercice 9 : Rotation**

Supposons que l'on réalise une rotation à gauche pour le nœud contenant E dans l'arbre suivant. Quel est le résultat d'un parcours en largeur sur l'arbre résultant ?

