# Optimisation

## Algorithmes d'approximation

Louis-Claude Canon
louis-claude.canon@univ-fcomte.fr

Master 2 Informatique – Semestre 9

# Plan

# Plan

# Contexte

De nombreux problèmes sont NP-difficiles mais leur résolution est critique. Différentes approches pour les résoudre :

- De façon exacte si la taille des entrées, $n$, est petite.
- On identifie une propriété qui permet de concevoir un algorithme polynomial.
- On cherche une heuristique qui fournit un résultat proche de l'optimal. Il s'agit d'un *algorithme d'approximation*.

# Algorithme d'approximation

- Un algorithme a un *facteur d'approximation* $\rho(n)$ si pour toute entrée de taille $n$ :
  - $C$ est le coût de la solution produite par l'algorithme ;
  - $C^*$ est le coût de la solution optimale ;
  - $\rho(n) \geq \max\left(\frac{C}{C^*}, \frac{C^*}{C}\right)$.
- On dit alors qu'il s'agit d'un *algorithme d'approximation* $\rho(n)$.
- Exemples :
  - l'algorithme de Dijkstra est un algorithme d'approximation 1 pour le plus court chemin ;
  - LPT est un algorithme d'approximation $4/3$ pour $P||C_{\max}$.

# Schéma d'approximation

- Un *schéma d'approximation* est un algorithme d'approximation dont le facteur d'approximation est $1 + \varepsilon$ (avec $\varepsilon \geq 0$) et la complexité dépend de $\varepsilon$.
- Si on diminue $\varepsilon$, le résultat s'améliore mais la complexité augmente.
- Un *schéma d'approximation polynomial*[1] est un algorithme dont la complexité est polynomial en $n$, la taille de l'entrée.
- Un *schéma d'approximation entièrement polynomial*[2] est un algorithme dont la complexité est polynomial en $n$ et en $1/\varepsilon$.

1. PTAS (Polynomial Time Approximation Scheme).
2. FPTAS (Fully Polynomial Time Approximation Scheme).

## Question

Lequel de ces algorithmes est un schéma d'approximation polynomial ?

1. LPT pour $P||C_{\max}$
2. l'algorithme de Dijkstra pour le plus court chemin
3. Un schéma d'approximation entièrement polynomial
4. Un schéma d'approximation

## Question

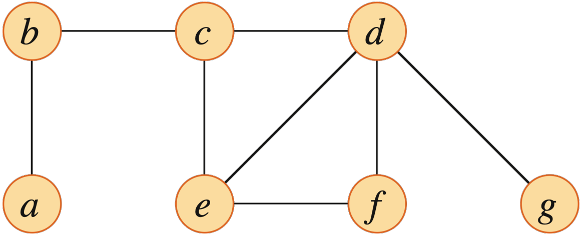
Lequel de ces algorithmes est un schéma d'approximation polynomial ?

1. LPT pour $P||C_{\max}$
2. l'algorithme de Dijkstra pour le plus court chemin ✓(optimal)
3. Un schéma d'approximation entièrement polynomial ✓
4. Un schéma d'approximation

# Plan

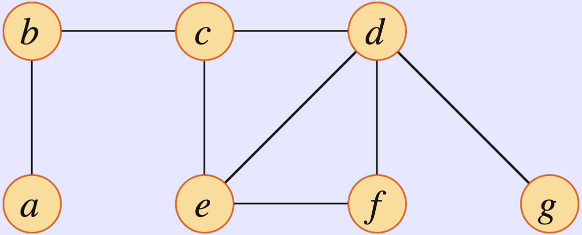
# Couverture de sommets

- Un graphe non-orienté $G = (V, E)$.
- Une *couverture de sommets* est un sous-ensemble $C \subseteq V$ tel que pour toute arête $(u, v) \in E$, soit $u \in C$, soit $v \in C$.
- Exemple : $V' = \{a, c, d, f, g\}$ est une couverture de sommets du graphe suivant.



## Question

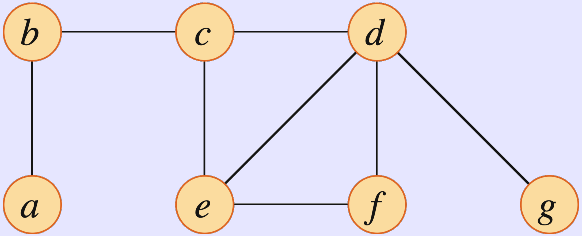
Lequel de ces ensembles n'est pas une couverture ?




1. $\{a, b, d, f, g\}$
2. $\{b, c, e, f, g\}$
3. $\{a, c, d, e\}$
4. $\{a, b, e, d, g\}$

## Question

Lequel de ces ensembles n'est pas une couverture ?



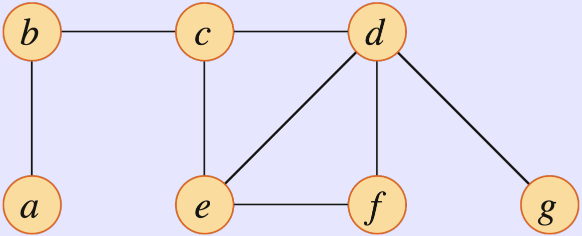

1. $\{a, b, d, f, g\}$ ✓$(c, e)$
2. $\{b, c, e, f, g\}$
3. $\{a, c, d, e\}$
4. $\{a, b, e, d, g\}$

# Problème de la couverture de sommets

- Le *problème de la couverture de sommets* consiste à trouver la couverture de sommets de taille minimale.
- Ce problème est NP-difficile.
- On peut utiliser COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE, un algorithme d'approximation 2.

## Question

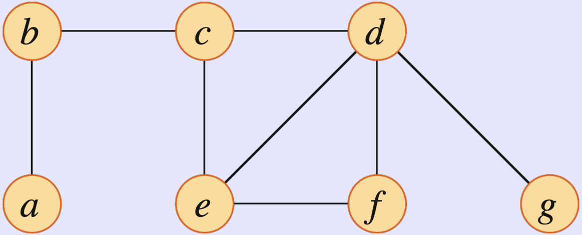
Quelle est la taille de la couverture minimale ?




- 2
- 3
- 4
- 5

## Question

Quelle est la taille de la couverture minimale ?



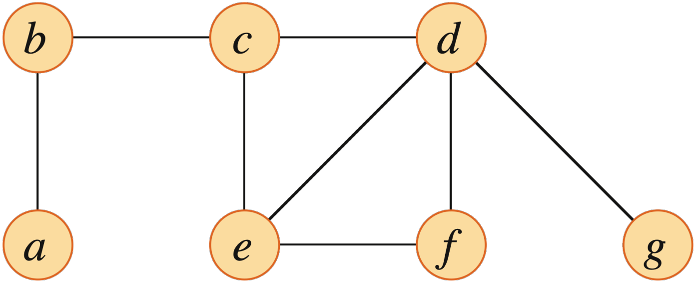

- 2
- 3 ✓ $\{b, d, e\}$
- 4
- 5

# Couverture-Sommet-Approchée

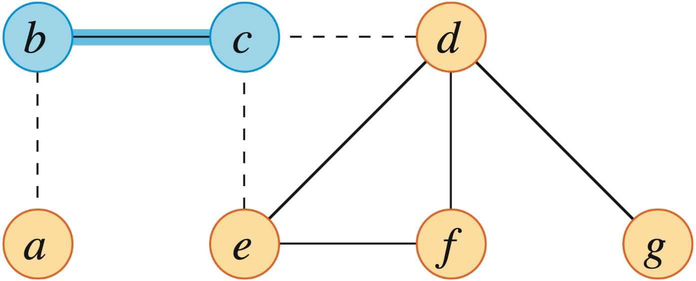
**Couverture-Sommet-Approchée($G$)**

$C \leftarrow \emptyset$
$E' \leftarrow G.E$
**tant que** $E' \neq \emptyset$ **faire**
  soit $(u, v)$ une arête quelconque de $E'$
  $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
  supprimer de $E'$ toutes les arêtes incidentes à $u$ ou à $u$
**retourner** $C$

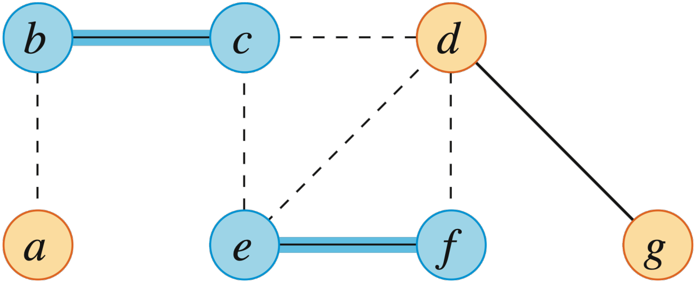
# Exemple



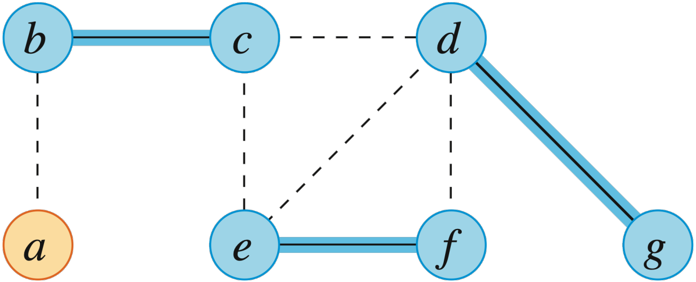
# Exemple



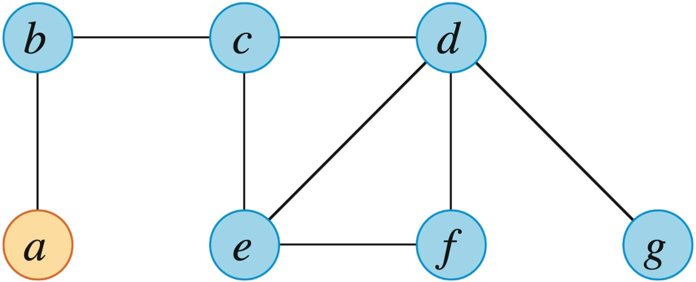
# Exemple



# Exemple

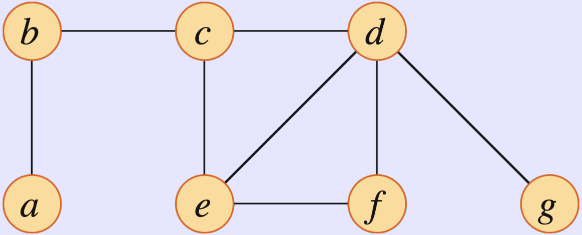


# Exemple



## Question

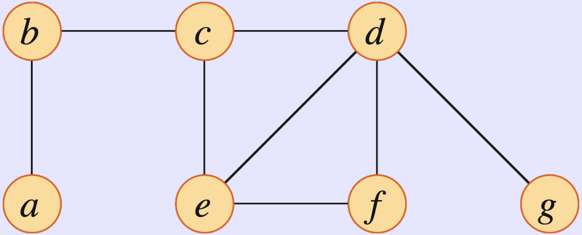
Laquelle de ces couvertures n'aurait pas pu être produite par COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE ?




1. $\{a, b, c, d, e, f\}$
2. $\{a, b, c, d, e\}$
3. $\{a, b, d, e\}$
4. $\{a, b, d, e, f, g\}$

## Question

Laquelle de ces couvertures n'aurait pas pu être produite par COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE ?




1. $\{a, b, c, d, e, f\}$
2. $\{a, b, c, d, e\}$ ✓(nombre de sommets pair)
3. $\{a, b, d, e\}$
4. $\{a, b, d, e, f, g\}$

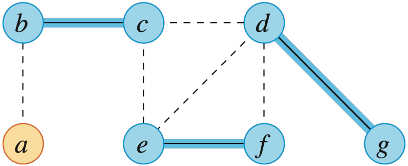
# Facteur d'approximation

## Théorème

COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE *est un algorithme d'approximation 2 à temps polynomial.*

## Démonstration.

- Soit $A$ les arêtes sélectionnées par l'algorithme.
- La couverture optimale, $C^*$ contient au moins l'un des sommets extrémités de chacune de ces arêtes.
- Comme ces sommets sont tous distincts, $|A| \leq |C^*|$. C'est une **borne inférieure** de la valeur de l'objectif optimale.
- Par construction, la taille de la couverture produite, $C$, est le double de $|A|$ : $|C| = 2|A|$.
- Donc $|C| \leq 2|C^*|$.




□

# Plan

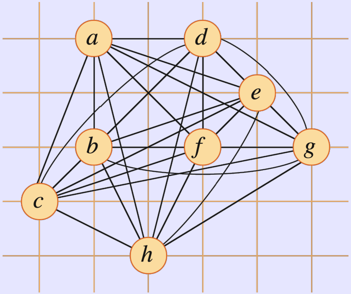
# Tournée

- Un graphe complet non-orienté $G = (V, E)$ avec une pondération sur les arêtes $c : E \to \mathbb{N}$.
- Une *tournée* $A \subseteq E$ est un sous-ensemble d'arêtes constituant un cycle hamiltonien de $G$ [3] de coût $c(A) = \sum_{(u,v)\in A} c(u, v)$.

3. Les arêtes permettent de revenir au point de départ et passent par chaque sommet une seule fois.

## Question

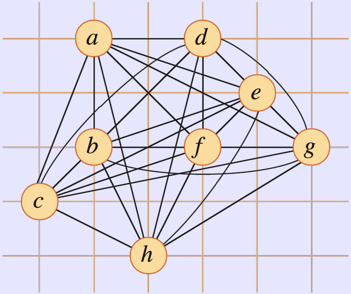
Quel est le coût de la tournée $a, b, c, d, e, f, g, h$ avec la distance de Manhattan ?




- 16
- 21
- 26
- 31

## Question

Quel est le coût de la tournée $a, b, c, d, e, f, g, h$ avec la distance de Manhattan ?



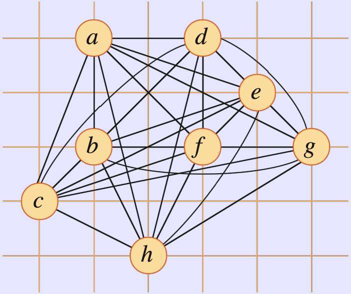

- 16
- 21
- 26 ✓$(2+2+6+2+2+2+5+5)$
- 31

# Problème du voyageur de commerce

- On cherche une tournée de coût minimal.
- C'est un problème NP-difficile.
- On suppose l'inégalité triangulaire pour tout triplet de sommets $u, v, w \in V$ : $c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$ (on ne peut pas réduire le coût avec un arrêt intermédiaire).
- C'est le cas de la distance euclidienne ou de Manhattan.
- C'est encore un problème NP-difficile.

## Question

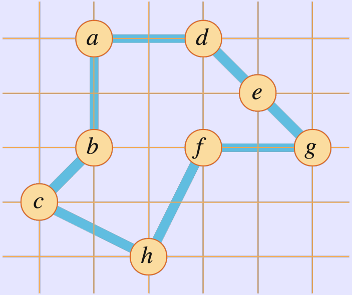
Quelle est la tournée de coût minimal avec la distance de Manhattan ?




1. $a, b, c, d, e, f, g, h$
2. $a, d, e, g, h, c, b, f$
3. $a, d, e, g, f, b, c, h$
4. $a, b, c, h, f, g, e, d$

## Question

Quelle est la tournée de coût minimal avec la distance de Manhattan ?




1. $a, b, c, d, e, f, g, h$
2. $a, d, e, g, h, c, b, f$
3. $a, d, e, g, f, b, c, h$
4. $a, b, c, h, f, g, e, d$ ✓(18)

# Tournée-VC-Approchée

Heuristique du point le plus proche :

---

Tournée-VC-Approchée($G$)

---

sélectionner un sommet quelconque $u \in V$

$H \leftarrow [u]$

**tant que** $|H| \neq |V|$ **faire**

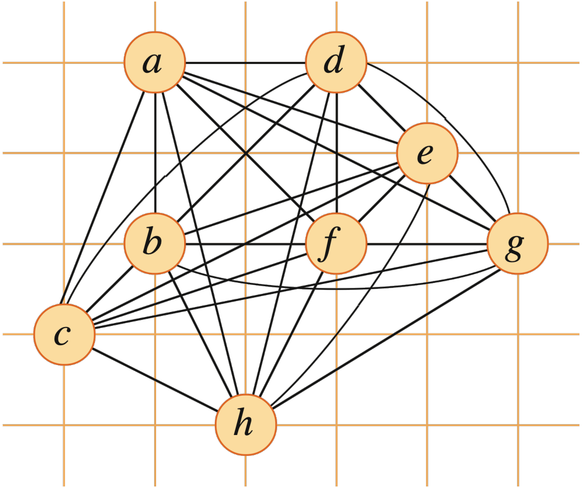
  choisir le sommet $u \notin H$ dont la distance à un sommet $v \in H$, $c(u, v)$, est minimale

  insérer $u$ après $v$ dans le cycle $H$

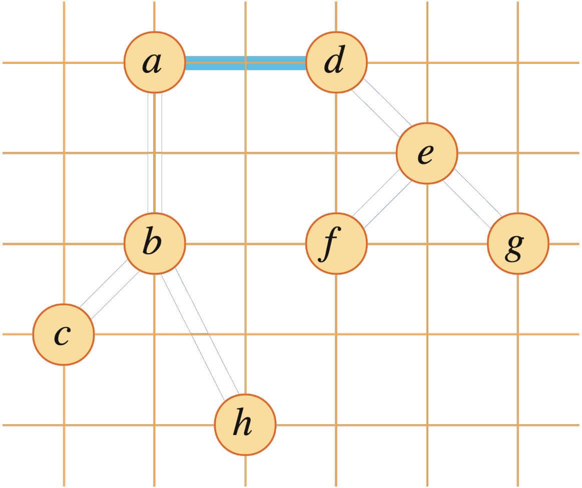
**retourner** le cycle $H$

---

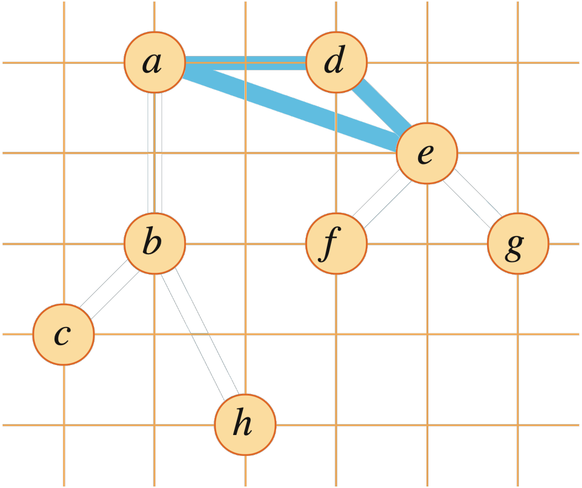
# Exemple



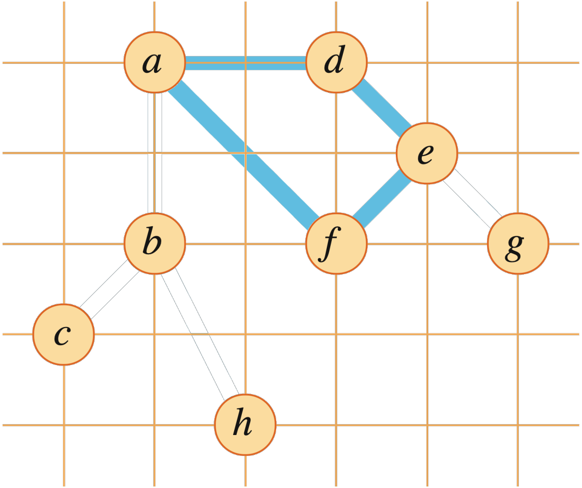
# Exemple



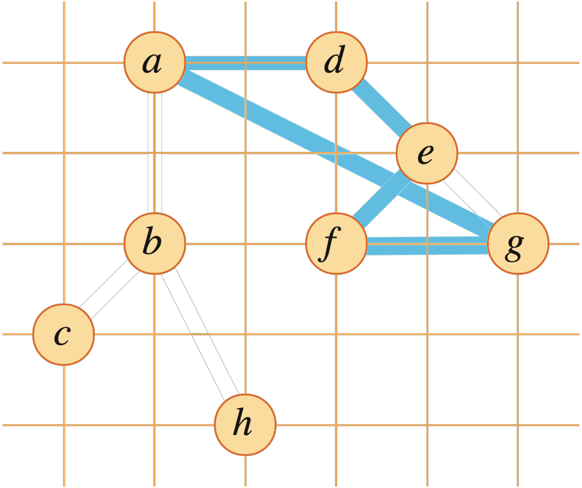
# Exemple



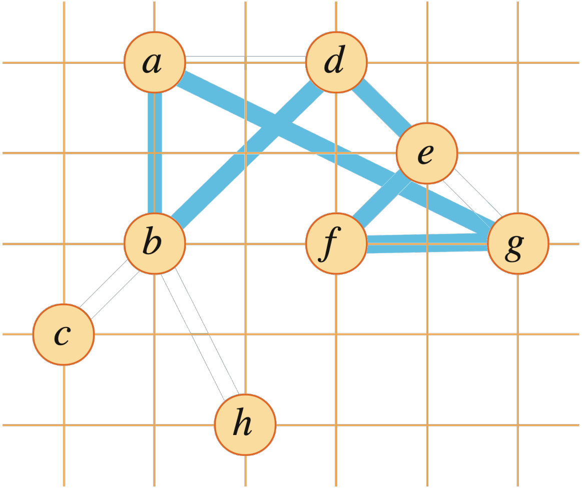
# Exemple



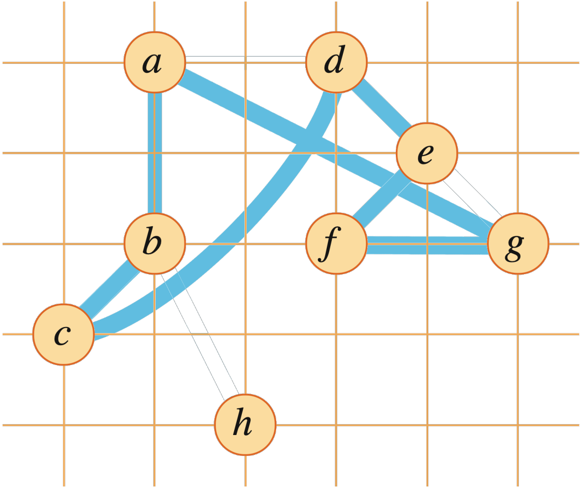
# Exemple



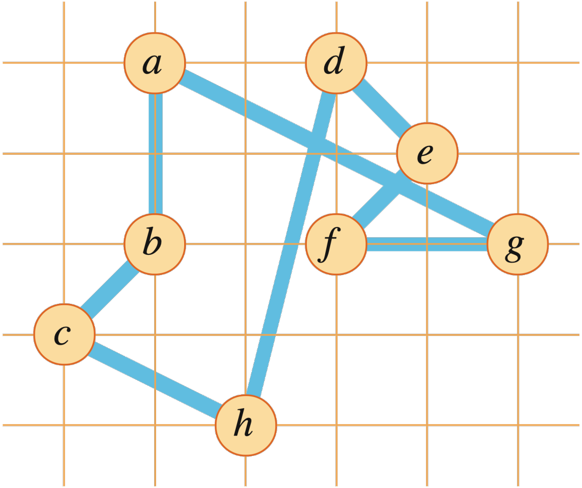
# Exemple



# Exemple

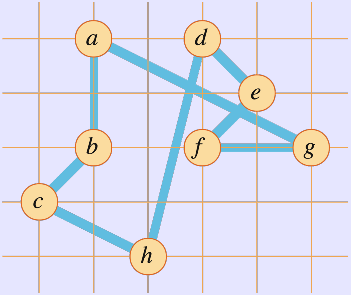


# Exemple



## Question

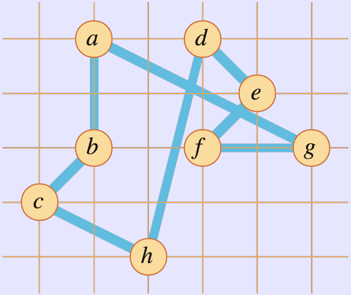
Quelle est le facteur d'approximation de TOURNÉE-VC-APPROCHÉE dans cet exemple ?




1. 5/4
2. 4/3
3. 3/2
4. 2

## Question

Quelle est le facteur d'approximation de Tournée-VC-Approchée dans cet exemple ?




1. 5/4
2. 4/3 ✓(24/18)
3. 3/2
4. 2

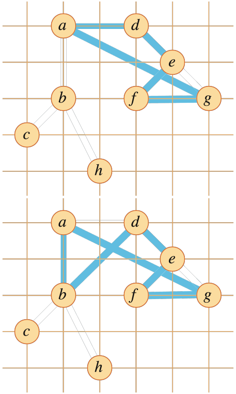
# Facteur d'approximation

## Théorème

TOURNÉE-VC-APPROCHÉE *est un algorithme d'approximation 2 pour le problème du voyageur de commerce avec inégalité triangulaire.*

## Démonstration.

- Soit $H_i$ la tournée générée à l'étape $i$ et $H_i^*$ une tournée optimale des sommets parcourus par $H_i$.
- Pour $0 \leq n \leq 3$, $c(H_i) = c(H_i^*)$ et il reste à faire la récurrence en supposant que $c(H_i) \leq 2c(H_i^*)$ pour $i \geq 1$.
- Pour la tournée optimale, $c(H_{i+1}^*) \geq c(H_i^*) + c(u, v)$ car il faut au moins atteindre le nouveau sommet et $u$ est le plus proche. C'est une **borne inférieure** de la valeur de l'objectif optimale.
- Pour la tournée générée, $c(H_{i+1}) \leq c(H_i) + 2c(u, v)$ grâce à l'inégalité triangulaire et ainsi, $c(H_{i+1}) \leq 2c(H_{i+1}^*)$.



# Résultats existants

## Curiosité

L'algorithme de Christofides (1976) est un algorithme d'approximation $3/2$.
En 2020, ce facteur d'approximation est amélioré à $3/2 - 10^{-36}$.

Sans l'hypothèse de l'inégalité triangulaire, on n'a à priori pas de garantie pour ce problème.

**Théorème**

*Si $P \neq NP$, alors pour toute constante $r \geq 1$, il n'existe aucun algorithme d'approximation $r$ à temps polynomial pour le problème général du voyageur de commerce.*

# Résultats existants

### Curiosité

L'algorithme de Christofides (1976) est un algorithme d'approximation $3/2$.
En 2020, ce facteur d'approximation est amélioré à $3/2 - 10^{-36}$.

Sans l'hypothèse de l'inégalité triangulaire, on n'a à priori pas de garantie pour ce problème.

### Théorème

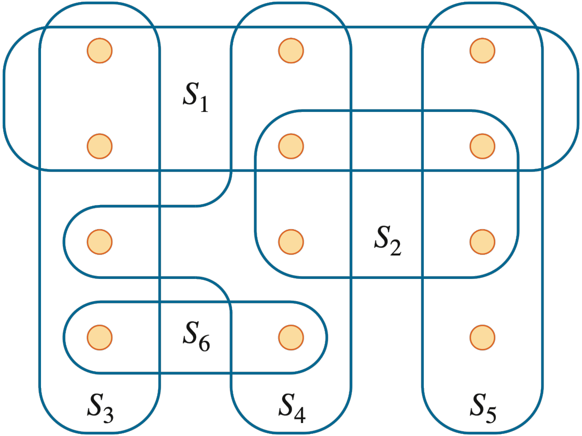
*Si $P \neq NP$, alors pour toute constante $r \geq 1$, il n'existe aucun algorithme d'approximation $r$ à temps polynomial pour le problème général du voyageur de commerce.*

# Plan

# Couverture d'ensemble

- Un ensemble $X$ et une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de $X$ : $\forall S \in \mathcal{F}, S \subseteq X$.
- Chaque élément de $X$ appartient à un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ : $X = \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$.
- Un sous-ensemble $S \in \mathcal{F}$ *couvre* ses éléments.

# Exemple d'instance avec $|X| = 12$ et $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$

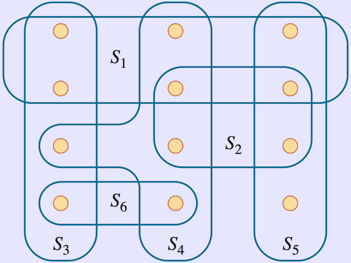


# Problème de la couverture d'ensemble

- Il faut déterminer quelle sous-famille $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ permet de couvrir tous les éléments de $X$ : $X = \bigcup_{S \in \mathcal{C}} S$.
- On cherche à minimiser le nombre des sous-ensembles sélectionnés $|\mathcal{C}|$.
- Ce problème généralise le problème de la couverture des sommets et est donc NP-difficile.

## Question

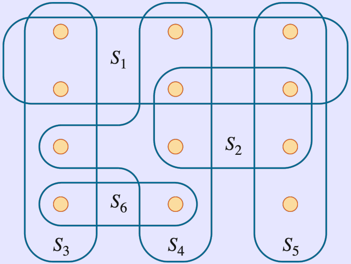
Quelle sous-famille $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ permet de couvrir tous les éléments ?




1. $\mathcal{C} = \{S_2, S_3, S_4, S_5\}$
2. $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, S_5, S_6\}$
3. $\mathcal{C} = \{S_1, S_4, S_5, S_6\}$
4. $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$

## Question

Quelle sous-famille $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ permet de couvrir tous les éléments ?




1. $\mathcal{C} = \{S_2, S_3, S_4, S_5\}$ ✓
2. $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, S_5, S_6\}$
3. $\mathcal{C} = \{S_1, S_4, S_5, S_6\}$ ✓
4. $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$

# Exemple de contexte pratique

- $X$ représente des compétences nécessaires pour résoudre un problème.
- Un sous-ensemble $S$ représente les compétences liées à une personne.
- $\mathcal{F}$ représente plusieurs personnes.
- On souhaite créer un comité, composé du moins de personnes possible, tel qu'il y ait au moins une personne ayant chacune des compétences.

# Couverture-Ensemble-Glouton

Quel principe glouton pourrait être mis en place ?

# Couverture-Ensemble-Glouton

Quel principe glouton pourrait être mis en place ?

---

Couverture-Ensemble-Glouton$(X, \mathcal{F})$

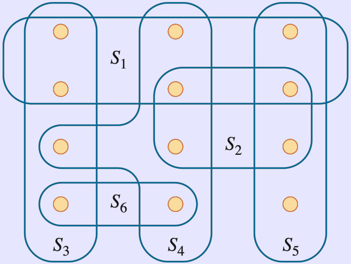
---

$U \leftarrow X$
$\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$
**tant que** $U \neq \emptyset$ **faire**
    choisir un $S \in \mathcal{F}$ qui maximise $|S \cap U|$
    $U \leftarrow U \setminus S$
    $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup S$
**retourner** $\mathcal{C}$

---

## Question

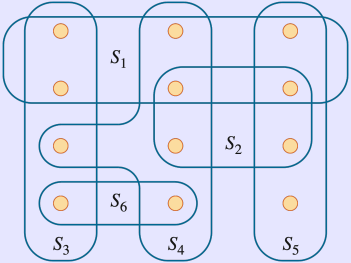
Quelle sous-famille peut être retournée par COUVERTURE-ENSEMBLE-GLOUTON ?




1. $\mathcal{C} = \{S_1, S_4, S_5, S_3\}$
2. $\mathcal{C} = \{S_1, S_4, S_5, S_6\}$
3. $\mathcal{C} = \{S_2, S_3, S_4, S_5\}$
4. $\mathcal{C} = \{S_3, S_4, S_5\}$

## Question

Quelle sous-famille peut être retournée par COUVERTURE-ENSEMBLE-GLOUTON ?




1. $\mathcal{C} = \{S_1, S_4, S_5, S_3\}$ ✓
2. $\mathcal{C} = \{S_1, S_4, S_5, S_6\}$ ✓
3. $\mathcal{C} = \{S_2, S_3, S_4, S_5\}$
4. $\mathcal{C} = \{S_3, S_4, S_5\}$

# Facteur d'approximation

### Théorème

Couverture-Ensemble-Glouton *est un algorithme d'approximation* $\log(n)$ *à temps polynomial.*

# Plan

# Résumé

- Un algorithme d'approximation produit des solutions dont le coût est borné par rapport à l'optimal.
- C'est une approche pour rester en temps polynomial pour des problèmes NP-difficiles.
- Le problème de la couverture de sommets admet un algorithme d'approximation 2 qui consiste à trouver un appariement maximal.
- Le problème du voyageur de commerce admet un algorithme de même facteur d'approximation qui rajoute le point le plus proche à chaque étape.
- Le problème de la couverture d'ensemble adment un algorithme avec un facteur d'approximation $\log(n)$ qui s'appuie sur un critère glouton.

# Prochaines échéances

- Début du tournoi le 19/11.
- Premier rendu intermédiaire du tournoi le 2/12.
- Second rendu intermédiaire du tournoi le 9/12.
- Épreuve de TP le 17/12.
- Rendu final pour le tournoi le 8/1.
- Épreuve sur table et restitution du tournoi le 9/1.