Exercice 1
On considère le problème suivant :
Entrée Un nombre écrit en binaire.
Question Ce nombre comporte-t-il un nombre de 1 de son écriture est pair ?

Donner deux exemples d'entiers en binaire étant des entrées positives de ce problème. Quel est le lanagage associé ? Montrer qu'il est régulier.

Exercice 2
On se donne la machine de Turing $M = (Q, q_0, q_f, \{0, 1, B\}, B, \{0, 1\}, \delta)$ où
— $Q = \{q_0, q_r, q_f\}$
— et δ est définie par :

δ	0	1	B
q_0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$(q_0, 1, \rightarrow)$	$(q_r, B, \leftarrow)$
q_r	$(q_r, 1, \leftarrow)$	$(q_f, 0, \leftarrow)$	

1. Écrire le calcul sur 1001001.
2. Écrire le calcul sur 1011100.
3. A votre avis, quel est le mot inscrit sur le ruban à la fin du calcul en fonction du mot écrit sur le ruban au début (on ne demande pas de démonstration).

Exercice 3
Écrire une machine de Turing qui reconnaît les mots de longueur paire sur l'alphabet $\{a, b\}$.

Exercice 4
Écrire une machine de Turing à deux rubans telle qu'un calcul est réussi à partir des mots u_1 et u_2 (sur l'alphabet $\{a, b\}$) si et seulement si $u_1 = u_2$.

Exercice 5
Écrire une machine de Turing qui reconnaît les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ de la forme w_1aaw_2 ou w_1bbw_2 où w_1 et w_2 ont la même longueur.

Exercice 6
Écrire une machine de Turing qui reconnaît les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ de la forme uu où u est un mot quelconque de $\{a, b\}^*$

Exercice 7
Écrire une machine de Turing qui reconnaît l'ensemble des mots de la forme a^nb^n où $n \in \mathbb{N}$. On pourra s'aider de rubans annexes.

Exercice 8
Écrire une machine de Turing qui reconnaît sur l'alphabet $\{a, b\}$, les mots de la forme uuu.

Exercice 9
1. On pose $u_1 = aab$, $u_2 = b$, $u_3 = a$, $u_4 = ba$ $v_1 = b$, $v_2 = a$, $v_3 = abb$, $u_4 = aab$. Cette instance du problème de Post admet-elle une solution ?
2. Expliquer pourquoi l'instance suivante du problème de Post n'admet pas de solution. $u_1 = bab$, $u_2 = bb$, $u_3 = abb$, $v_1 = ba$, $v_2 = abb$, $v_3 = bab$.

Exercice 10
Montrer que Chemin Hamiltonien est dans NP.

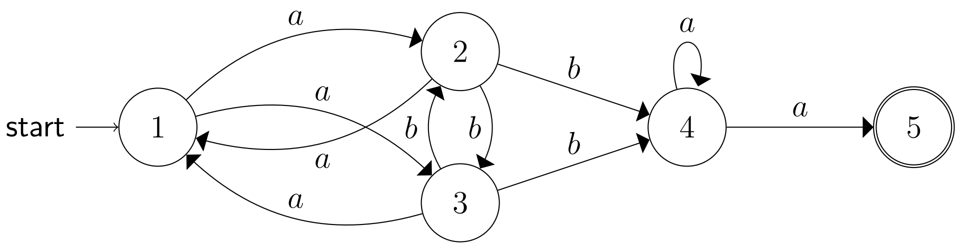
Exercice 11

Montrer que SAT est dans NP.

Exercice 12
Montrer que décider si un entier donné en binaire est premier est dans co-NP.

Exercice 13
On considère le problème suivant :
Entrée Un automate non déterministe $\mathcal{A}$ et un mot w.
Question Est-ce que w est reconnu par $\mathcal{A}$?

— En considérant l'automate ci-dessous, écrire plusieurs chemins partant de l'état initial et étiquetés par le mot $aaabbaa$.



— Donner un algorithme pour ce problème, sachant que l'automate n'est pas forcément déterministe. Estimer la compléxité en fonction de la taille de l'automate. Votre algorithme est-il polynomial ?
— Montrer que le problème est dans NLOGSPACE (en donnant un algorithme non déterministe utilisant un espace de travail logarithmique).
— En déduire que le problème est dans P. Donner un algorithme polynomial pour le problème.

Exercice 14
Montrer que le problème suivant est dans PSPACE.
Entrée Un automate non déterministe $\mathcal{A}$.
Question A-t-on $L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$?

Exercice 15
Une formule propositionnelle est sous forme k-SAT si elle est de la forme

$$\wedge_i C_i$$

où les C_i sont des disjonctions de k variables propositionnelles (précédés eventuellement de négations).

— Donner un exemple de formule 3-SAT, 2-SAT et 5-SAT.
— On considère le problème suivant :
  Entrée Une formule k-SAT
  Question Existe-t-il une instance de la formule qui s'évalue a VRAI ?
— Montrer que k-SAT est dans NP.
— A partir d'une formule 2-SAT on construit le graphe suivant : il y a un sommet pour chaque variable et chaque négation de variable. Il y a une arète entre deux sommets x et y si $\neg x \vee y$ est une clause de la formule. Dessiner le graphe correspondant à la formule

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$$

— Justifer que le probleme 2-SAT n'admet pas une solution pour une formule donnée si et seulement s'il y a dans le graphe un chemin allant d'une variable à sa négation et réciproquement.
— En déduire que le problème 2-SAT est dans co-NLOGSPACE.
— En déduire que le problème 2-SAT est dans P.

Exercice 16
Montrer que voyageur de commerce (trouver une boucle de longueur inférieure à k donné (plus grand que le nombre de sommets) et visitant tous les sommets) est plus difficile que Circuit Hamiltonien.

Exercice 17
Montrer la réciproque.

Exercice 18
On considère le problème suivant : étant donnée une formule de la logique propositionnelle F, utilisant des variables $A_1, \ldots, A_n$, existe-t-il une interprétation de cette formule qui vaut `vrai` ? On se propose de résoudre naïvement ce problème en calculant la table de vérité de la formule. On suppose que l'on dispose pour cela de 10000 ordinateurs en réseau qui vont chacun calculer un morceau de la table de vérité. On suppose aussi que chaque ordinateur a une vitesse de 10 GHz et qu'il peut évaluer la formule en un seul cycle d'horloge.

1. Combien de lignes a la table de vérité de la formule F ? (en fonction de n).
2. On suppose que $n = 10$, en combien de temps le problème est-il résolu ?
3. Même question avec $n = 20$.
4. Même question avec $n = 30$.
5. Même question avec $n = 50$.
6. Même question avec $n = 80$.

On rappelle que 2^{10} est environ égal à 10^3. On rappelle aussi qu'il 86400 secondes dans une journée et environ $3\ 10^7$ secondes dans une année.

Exercice 19
On suppose qu'une grille de sodoku possède initialement 27 chiffres déjà placés, soit 3 par carré de 3 sur 3. Pour la résoudre on réalise un programme naïf : on remplit chaque case non remplie par un entier entre 1 et 9, sans utiliser les entiers déjà présent dans le petit carré. On regarde ensuite si la grille complète vérifie les contraintes.

1. Combien y a-t-il de façons différentes de remplir un petit carré ?
2. Combien de façons y a-t-il de remplir la grille ?
3. Combien de temps met l'algorithme pour calculer toutes les grilles sur un ordinateur à 10 Ghz (en supposant qu'une grille est évaluée par cycle du processeur) ?

Exercice 20

1. Écrire une formule codant qu'il n'y a qu'un seul 1 sur la première ligne.
2. Écrire une formule codant qu'il n'y a qu'un seul 2 sur la première ligne.
3. Écrire une formule codant qu'il n'y a qu'un seul 1 sur la première colonne.
4. Écrire une formule générale pour le Sodoku.
5. Écrire la formule correspondant à la grille donnée au début de la section.

Exercice 21
Proposer un codage SAT pour le problème de 3-coloriage

Exercice 22
Décrire un algorithme permettant de résoudre efficacement le problème 2-COLORIAGE (même problème que celui de 3-COLORIAGE mais avec deux couleurs).

Exercice 23

Au pays de Gnirut, Alex vend des potions redonnant la vue aux aveugles et soignant aussi toutes les maladies. N'étant pas confiant dans la qualité de ses produits et souhaitant quand même en vendre un maximum, il souhaite passer dans toutes les villes, mais sans passer deux fois par la même. Il s'intéresse donc au problème connu sous le nom du problème du circuit Hamiltonien : un graphe possède un circuit Hamiltonien s'il existe un chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet.

1. On considère le graphe $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (4, 1), (2, 5), (4, 2)\}$. Le dessiner. Trouver deux circuits Hamiltonien.
2. On considère le graphe $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 3)\}$. Le dessiner. Pourquoi ce graphe ne comporte-t-il pas de circuit Hamiltonien.
3. On suppose que les sommets d'un graphe sont toujours numérotés de 1 à n, où n est le nombre de sommets du graphe. On pose $a_{i,j}$ une variable propositionnelle indiquant qu'il y a dans le graphe une arête de i vers j. Donner une formule F_G avec les $a_{i,j}$ permettant de coder un graphe (il s'agit de la même formule que pour le problème de coloriage).
4. A tout circuit (pas forcément Hamiltonien) dans un graphe on peut associer une fonction π de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\pi(i)$ soit égale au numéro du i-ième sommet traversé par le circuit. Quel circuit correspond à $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 4$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 5$, $\pi(5) = 6$ et $\pi(6) = 1$ dans le graphe de la question 1 ? Donner les fonctions π associées aux parcours Hamiltonien de la question 1.
5. Étant donné un parcours, quelles propriétés nécessaires et suffisantes doit posséder π pour que le parcours soit Hamiltonien ? On se donne $x_{i,j}$ une variable propositionnelle codant le fait que $\pi(i) = j$. Écrire les propriétés sous formes de formules propositionnelles utilisant les $x_{i,j}$ et les $a_{i,j}$.
6. Écrire un formule propositionnelle traduisant l'existence d'un circuit Hamiltonien dans un graphe.

Exercice 24

Une fois arrivée à destination, Alex abandonne sa profession pour devenir chauffeur de taxi pour touristes. Afin de bien gagner sa vie il veut promener ses clients au maximum, sans pour autant passer deux fois dans la même rue pour ne pas risquer des réprimandes. On s'intéresse donc au problème dual du circuit Hamiltonien : existe-t-il dans un graphe un chemin euclidien, c'est-à-dire un chemin qui passe par chaque arête une et une seule fois ? Proposer une modélisation similaire à celle de l'exercice précédent.