TD Optimisation – session 1 – Programmation linéaire

19 novembre 2024

Objectifs d'apprentissage :
— manipuler des programmes linéaires simples ;
— utiliser et adapter des formulations de problème d'optimisation classiques ;
— introduire aux concepts de dualité.

Exercice 1: Solution réalisable

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{minimiser} & -2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{sous les contraintes} & x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_1 & \geq & 0 \end{array}$$

Donner trois solutions réalisables pour ce programme linéaire. Quelle est la valeur de l'objectif de chacune ?

— $x_1 = 4$, $x_2 = 3$
— $x_1 = 5$, $x_2 = 2$
— $x_1 = 6$, $x_2 = 1$
— $x_1 = 0$, $x_2 = 7$

Exercice 2: Non-positivité

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{minimiser} & 2x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & & \\ \text{sous les contraintes} & x_1 & & & - & x_3 & = & 7 \\ & 3x_1 & + & x_2 & & & \geq & 24 \\ & & & & & x_2 & \geq & 0 \\ & & & & & x_3 & \leq & 0 \end{array}$$

Donner trois solutions réalisables pour ce programme linéaire. Quelle est la valeur de l'objectif de chacune ?

— $x_1 = 3$, $x_2 = 15$, $x_3 = -4$
— $x_1 = 3$, $x_2 = 16$, $x_3 = -4$
— $x_1 = 3$, $x_2 = 17$, $x_3 = -4$

Exercice 3: Irréalisable

Montrer que le programme linéaire suivant est irréalisable :

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{minimiser} & 3x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{sous les contraintes} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -2x_1 & - & 2x_2 & \leq & -10 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

En simplifiant la seconde contrainte, on a $x_1 + x_2 \geq 5$, ce qui est incompatible avec la première contrainte.

Exercice 4: Non-borné

Montrer que le programme linéaire suivant est non-borné :

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{minimiser} & x_1 & - & x_2 & & \\ \text{sous les contraintes} & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

On opère la substitution suivante : $x_1 = x_2/2 + 1/2$. On obtient :

$$\begin{array}{lrcr} \text{minimiser} & -x_2/2 & + & 1/2 \\ \text{sous la contrainte} & -x_2 & \geq & 3/5 \end{array}$$

Et donc x_2 peut prendre une valeur arbitrairement élevé et baissé ainsi la valeur objectif arbitrairement.

Exercice 5: Non-borné mais finie

Donner un exemple de programme linéaire dont la région de réalisabilité n'est pas bornée, mais dont la valeur de l'objectif optimale est néanmoins finie.

$$\begin{array}{lrcr} \text{minimiser} & x & & \\ \text{sous les contraintes} & x & \geq & 0 \end{array}$$

Exercice 6: Conversions

Parfois, dans un programme linéaire, il faut convertir des contraintes d'une forme à une autre.

— Montrer comment convertir une contraintes d'égalité en un ensemble équivalent d'inégalités. Par exemple, pour l'égalité $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, quel ensemble d'inégalités sont satisfaites si et seulement si cette égalité l'est ?

— Montrer comment convertir une inégalité $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ en une contrainte de non-négativité.

— $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ et $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$.

— $b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 0$.

Exercice 7: Minimisation et maximisation

Expliquer comment convertir un programme linéaire de minimisation en un programme linéaire de maximisation équivalent. Justifier pourquoi ce nouveau programme linéaire est équivalent.

On multiplie l'objectif par -1.

Exercice 8: Électeurs

Dans le problème politique présenté au début du cours, il existe des solutions réalisables qui correspondent à gagner plus d'électeurs qu'il n'y en a réellement dans la circonscription. Par exemple, vous pouvez fixer x_2 à 200, x_3 à 200 et $x_1 = x_4 = 0$. Cette solution est réalisable, mais elle semble indiquer que vous gagnerez 400 000 électeurs de banlieue, alors qu'il n'y en a que 200 000 en réalité. Quelles contraintes pouvez-vous ajouter au programme linéaire pour vous assurer que que vous ne gagniez

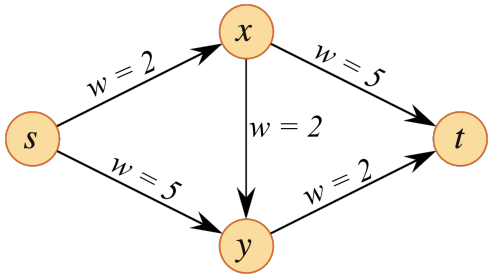
jamais plus d'électeurs qu'il n'y en a en réalité ?

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{minimiser} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\
\text{sous les contraintes} & -2x_1 & + & 8x_2 & + & 0x_3 & + & 10x_4 & \geq & 50 \\
& 5x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & \geq & 100 \\
& 3x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & - & 2x_4 & \geq & 25 \\
& & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{minimiser} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\
\text{sous les contraintes} & -2x_1 & + & 8x_2 & + & 0x_3 & + & 10x_4 & \geq & 50 \\
& -2x_1 & + & 8x_2 & + & 0x_3 & + & 10x_4 & \leq & 100 \\
& 5x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & \geq & 100 \\
& 5x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & \leq & 200 \\
& 3x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & - & 2x_4 & \geq & 25 \\
& 3x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & - & 2x_4 & \leq & 50 \\
& & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

Exercice 9: Plus court chemin

Écrire explicitement le programme linéaire qui correspond à la recherche du plus court chemin du nœud s vers le nœud y sur le graphe suivant :



$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{minimiser} & d_y & & & & & & \\
\text{sous les contraintes} & d_x & \leq & d_s & + & 2 \\
& d_y & \leq & d_s & + & 5 \\
& d_y & \leq & d_x & + & 2 \\
& d_t & \leq & d_x & + & 5 \\
& d_t & \leq & d_y & + & 2 \\
& d_s, d_x, d_y, d_t & & & \geq & 0
\end{array}
$$

Exercice 10: Plus courts chemins à couple unique

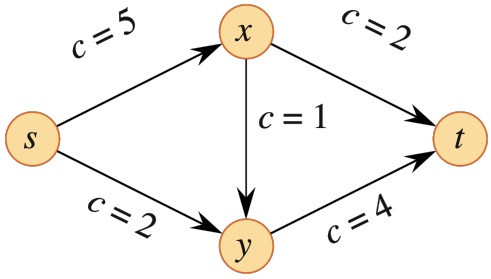
Dans le problème des plus courts chemins à couple unique, on veut trouver les longueurs des plus courts chemins entre un sommet origine s et tous les sommets $v \in V$. Étant donné un graphe G, écrire un programme linéaire pour lequel la solution a la propriété que d_v est la longueur du plus court chemin entre s et v pour tout sommet $v \in V$.

On rajoute dans la fonction objectif tous les d_v pour qu'ils soient tous maximisés :

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximiser} & \displaystyle\sum_{v \in V} d_t \\
\text{sous les contraintes} & d_v \leq d_u + w(u,v) \text{ pour tout arc } (u,v) \in E \\
& d_s = 0
\end{array}
$$

Exercice 11: Flot maximum

Écrire explicitement le programme linéaire qui correspond à la recherche du flot maximal sur la figure suivante :



$$
\begin{array}{lrcl}
\text{maximiser} & f_{sx} + f_{sy} & & \\
\text{sous les contraintes} & f_{sx} & \leq & 5 \\
& f_{sy} & \leq & 2 \\
& f_{xy} & \leq & 1 \\
& f_{xt} & \leq & 2 \\
& f_{yt} & \leq & 4 \\
& f_{sx} & = & f_{xy} + f_{xt} \\
f_{sy} + & f_{xy} & = & f_{yt} \\
& f_{sx}, f_{sy}, f_{xy}, f_{xt}, f_{yt} & \geq & 0
\end{array}
$$

Exercice 12: Ré-écriture

Réécrire le programme linéaire pour le flot maximum, de façon qu'il n'utilise que $O(|V| + |E|)$ contraintes.

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximiser} & \displaystyle\sum_{v \in V} f_{sv} - \sum_{v \in V} f_{vs} & \\
\text{sous les contraintes} & f_{uv} \leq c(u,v) & \text{pour chaque } u, v \in V \\
& \displaystyle\sum_{v \in V} f_{uv} = \sum_{v \in V} f_{vu} & \text{pour chaque } u \in V \setminus \{s,t\} \\
& f_{uv} \geq 0 & \text{pour chaque } u, v \in V
\end{array}
$$

On réindice simplement les variables de flot en fonction des arcs plutôt que des couples de nœuds.

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximiser} & \displaystyle\sum_{(s,v) \in E} f_{sv} - \sum_{(v,s) \in E} f_{vs} & \\
\text{sous les contraintes} & f_{uv} \leq c(u,v) & \text{pour chaque } (u,v) \in E \\
& \displaystyle\sum_{(u,v) \in E} f_{uv} = \sum_{(v,u) \in E} f_{vu} & \text{pour chaque } u \in V \setminus \{s,t\} \\
& f_{uv} \geq 0 & \text{pour chaque } (u,v) \in E
\end{array}
$$

Exercice 13: Couplage maximum dans un graphe biparti

Écrire un programme linéaire qui, étant donné un graphe biparti $G = (V, E)$, résolve le problème du couplage maximum dans un graphe biparti. Un couplage est un ensemble d'arêtes qui n'ont aucun sommet en commun.

S'appuie sur le théorème de l'intégralité sur le problème de flot maximum : si les capacités sont entières, il existe une solution dont les variables sont toutes entières.
Les sommets se répartissent en L et R. Les arêtes sont définies entre ces deux ensembles. On rajoute un source s et un puits t : $V = \{s, t\} \cup L \cup R$

$$
\begin{aligned}
\text{maximiser} \quad & \sum_{v \in L} f_{sv} \\
\text{sous les contraintes} \quad & f_{uv} \leq 1 && \text{pour tout } (u,v) \in V \\
& \sum_{v \in V} f_{vu} = \sum_{v \in V} f_{uv} && \text{pour tout } u \in L \cup R \\
& f_{uv} \geq 0 && \text{pour tout } u \in V
\end{aligned}
$$

Exercice 14: Modélisation alternative

Il peut y avoir plusieurs façons de modéliser un problème particulier sous la forme d'un programme linéaire. Cet exercice donne une formulation alternative pour le problème du flot maximal. Soit P_i un ensemble d'arêtes allant de la source s au puits t et $\mathcal{P} = P_1, P_2, \ldots, P_p$ l'ensemble de tous les chemins possibles de la source s au puits t. En utilisant les variables de décision $x_1, \ldots, x_p$, où x_i est la quantité de flot sur le chemin i, formuler un programme linéaire pour le problème du flot maximum. Quelle est la borne supérieure de p, le nombre de chemins simples dirigés de s à t ?

$$
\begin{aligned}
\text{maximiser} \quad & \sum_{i=1}^{p} x_i \\
\text{sous les contraintes} \quad & \sum_{i:(u,v) \in P_i} \leq c_{uv} && \text{pour tout } (u,v) \in E \\
& x_i \geq 0 && \text{pour tout } 1 \leq i \leq p
\end{aligned}
$$

Pour voir qu'il y a un nombre exponentielle de chemin, on peut construire un graphe orienté complet. À chaque sommet rajouté, on multiplie le nombre de chemins par 2.

Exercice 15: Flot multi-produits à coût minimal

Dans le problème du flot multi-produits à coût minimal, on a un graphe orienté $G = (V, E)$ dans lequel chaque arc $(u, v) \in E$ possède une capacité positive $c(u, v) \geq 0$ et un coût $a(u, v)$. Comme dans le problème du flot multi-produits, on a k produits différents, $K_1, K_2, \ldots, K_k$, le produit i étant spécifié via le triplet $K_i = (s_i, t_i, d_i)$: s_i est la source du produit i, t_i en est le puits et d_i est la demande, c'est-à-dire la valeur de flot que l'on désire pour le produit i entre s_i et t_i. On définit le flot f_i du produit i et le flot total $f(u, v)$ sur l'arc (u, v) comme dans le problème du flot multi-produits. Un flot réalisable est un flot dans lequel le flot total sur chaque arc (u, v) ne dépasse pas la capacité de l'arc (u, v). Le coût d'un flot est $\sum_{u,v \in V} a(u, v) f(u, v)$, et l'objectif ici est de trouver le flot réalisable de coût minimal. Exprimer ce problème sous forme de programme linéaire.

La méthode consiste à définir d'abord les variables. On peut ensuite formuler la fonction objectif en s'assurant de sa linéarité. Enfin, il faut vérifier que l'on oublie aucune contrainte vis-à-vis de l'énoncé du problème.

$$
\begin{aligned}
&\text{minimiser} && \sum_{(u,v)\in E} a(u,v) \sum_{i=1}^{k} f_{uv}^{i} \\
&\text{sous les contraintes} && \sum_{i=1}^{k} f_{uv}^{i} \leq c(u,v) && \text{pour tout } (u,v) \in E \\
& && \sum_{v\in V} f_{vu}^{i} - \sum_{v\in V} f_{uv}^{i} = 0 && \text{pour tout } u \in V \setminus \{s_i, t_i\} \text{ et pour tout } 1 \leq i \leq k \\
& && \sum_{v\in V} f_{s_i v}^{i} - \sum_{v\in V} f_{v s_i}^{i} = d && \text{pour tout } u \in V \text{ et pour tout } 1 \leq i \leq k \\
& && f_{uv}^{i} \geq 0 && \text{pour tout } u \in V \text{ et pour tout } 1 \leq i \leq k
\end{aligned}
$$

Exercice 16: Dual

Formuler le dual du programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{minimiser} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\
\text{sous les contraintes} & -2x_1 & + & 8x_2 & & & + & 10x_4 & \geq & 50 \\
& 5x_1 & + & 2x_2 & & & & & \geq & 100 \\
& 3x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & - & 2x_4 & \geq & 25 \\
& & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

□

Exercice 17: Coupe minimum

Écrire le dual du programme linéaire de flot maximum défini ainsi :

$$
\begin{aligned}
&\text{maximiser} && \sum_{v\in V} f_{sv} - \sum_{v\in V} f_{vs} \\
&\text{sous les contraintes} && f_{uv} \leq c(u,v) && \text{pour chaque } u, v \in V \\
& && \sum_{v\in V} f_{uv} = \sum_{v\in V} f_{vu} && \text{pour chaque } u \in V \setminus \{s,t\} \\
& && f_{uv} \geq 0 && \text{pour chaque } u, v \in V
\end{aligned}
$$

Expliquer comment on peut interpréter cette formulation en tant que problème de coupe minimum.

□

Exercice 18: Flot de coût minimum

Écrire le dual du programme linéaire du flot de coût minimum défini ainsi :

$$
\begin{aligned}
&\text{minimiser} && \sum_{(u,v)\in E} a(u,v) \times f_{uv} \\
&\text{sous les contraintes} && f_{uv} \leq c(u,v) && \text{pour chaque } u, v \in V \\
& && \sum_{v\in V} f_{uv} - \sum_{v\in V} f_{vu} = 0 && \text{pour chaque } u \in V \setminus \{s,t\} \\
& && \sum_{v\in V} f_{sv} - \sum_{v\in V} f_{vs} = d && \\
& && f_{uv} \geq 0 && \text{pour chaque } u, v \in V
\end{aligned}
$$

Expliquer comment on peut interpréter ce problème en termes de graphes et de flots.

Exercice 19: Dualité du flot maximum

Quel résultat de la théorie des graphes peut-on interpréter comme étant de la dualité faible pour le problème du flot maximum ?

Le théorème du flot maximum et de la coupe minimum.