

TD Optimisation – session 2 – Algorithmes d’approximation

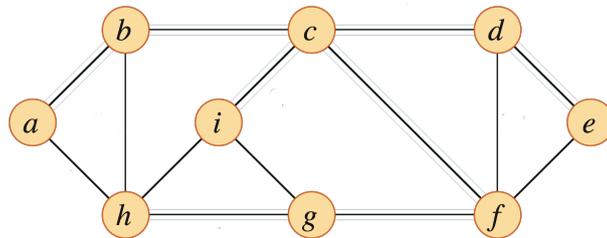
6 janvier 2025

Objectifs d’apprentissage :

- manipuler les problèmes vus en cours ;
- appliquer les algorithmes d’approximation vus en cours ;
- identifier les pires instances pour ces algorithmes ;
- concevoir des algorithmes d’approximation ;
- mettre en pratique des techniques de preuves pour garantir le facteur d’approximation.

Exercice 1: Couverture-Sommet-Approchée (application)

Quelles couvertures de sommets sont retournées par COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE sur le graphe suivant :



Quelle est la couverture optimale ?

Exercice 2: Couverture-Sommet-Approchée (pire cas)

Donner un exemple de graphe pour lequel COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE engendre toujours une solution atteignant le facteur d’approximation 2.

Exercice 3: Couverture-Sommet-Approchée (optimalité)

Donner un exemple de graphe pour lequel COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE engendre toujours une solution optimale.

Exercice 4: Couplage maximal

Soit E l’ensemble des arêtes choisies par COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE. Prouver que l’ensemble C est un couplage maximal du graphe G . Un couplage est un ensemble d’arêtes qui n’ont aucun sommet en commun. Il est maximal lorsqu’il n’est plus possible d’y rajouter des arêtes.

Exercice 5: Couverture gloutonne

Le professeur Sourire propose l’heuristique suivante pour résoudre le problème de la couverture de sommets. On choisit de façon répétée un sommet de plus haut degré, et on supprime toutes ses arêtes incidentes. Donner un exemple montrant que l’heuristique du professeur n’est pas optimale.

Exercice 6: Couverture sur des arbres

Donner un algorithme glouton efficace qui trouve en temps linéaire une couverture de sommets optimale pour un arbre.

Indice : les feuilles sont-elles dans la couverture optimale ?

Exercice 7: Tournée-VC-Approchée (pire cas)

Donner un exemple de graphe pour lequel TOURNÉE-VC-APPROCHÉE engendre toujours une solution atteignant le facteur d’approximation $3/2$.

Exercice 8: Tournée-VC-Approchée (optimalité)

Donner un exemple de graphe pour lequel TOURNÉE-VC-APPROCHÉE engendre toujours une solution optimale.

Exercice 9: Inégalité triangulaire

On suppose qu'un graphe non-orienté complet $G = (V, E)$ ayant au moins 3 sommets a une fonction de coût c qui vérifie l'inégalité triangulaire. Prouver que $c(u, v) \geq 0$ pour tout $u, v \in E$.

Exercice 10: Distance euclidienne

Supposer que les sommets d'une instance du problème du voyageur de commerce soient des points du plan et que la fonction de coût $c(u, v)$ soit la distance euclidienne entre les points u et v . Montrer qu'une tournée optimale ne se recoupe jamais elle-même.

Exercice 11: Couverture-Ensemble-Glouton (application)

On considère chacun des mots suivants comme un ensemble de lettres : **aride**, **date**, **drain**, **heron**, **louche**, **nom**, **short**, **slalom**, **snob**, **these**. Montrer quelle est la couverture d'ensemble produite par COUVERTURE-ENSEMBLE-GLOUTON (en cas d'égalité, le choix glouton se fait en faveur du mot qui apparaît le premier dans le dictionnaire).

Quelle est la couverture optimale ?

Exercice 12: Couverture-Ensemble-Glouton (pire cas)

Donner un exemple de graphe pour lequel COUVERTURE-ENSEMBLE-GLOUTON engendre toujours une solution atteignant un facteur d'approximation strictement supérieur à 3.

Exercice 13: Couverture-Ensemble-Glouton (optimalité)

Donner un exemple de graphe pour lequel COUVERTURE-ENSEMBLE-GLOUTON engendre toujours une solution optimale.

Exercice 14: Sous-graphe acyclique

Soit un graphe orienté $G = (V, E)$. On cherche le plus grand sous-ensemble des arcs E tel que le graphe résultant soit acyclique. Concevoir un algorithme d'approximation 2.

Indice : numéroter les sommets arbitrairement et séparer les arcs en deux sous-ensembles (ceux allant des petits sommets vers les grands et les autres).

Établir une borne sur la taille optimale.