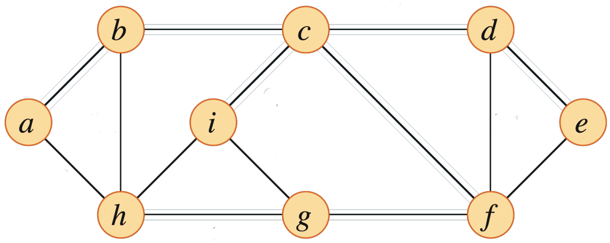
TD Optimisation – session 2 – Algorithmes d'approximation

6 janvier 2025

Objectifs d'apprentissage :
— manipuler les problèmes vus en cours ;
— appliquer les algorithmes d'approximation vus en cours ;
— identifier les pires instances pour ces algorithmes ;
— concevoir des algorithmes d'approximation ;
— mettre en pratique des techniques de preuves pour garantir le facteur d'approximation.

Exercice 1: Couverture-Sommet-Approchée (application)

Quelles couvertures de sommets sont retournées par COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE sur le graphe suivant :



Quelle est la couverture optimale ?

Exemple de couverture obtenue : $\{b, c, d, e, f, g, h, i\}$. La couverture optimale est $\{b, d, i, h, f\}$.

Exercice 2: Couverture-Sommet-Approchée (pire cas)

Donner un exemple de graphe pour lequel COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE engendre toujours une solution atteignant le facteur d'approximation 2.

2 sommets et une arête.

Exercice 3: Couverture-Sommet-Approchée (optimalité)

Donner un exemple de graphe pour lequel COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE engendre toujours une solution optimale.

Pas de sommet ou 3 sommets en triangle.

Exercice 4: Couplage maximal

Soit E l'ensemble des arêtes choisies par COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE. Prouver que l'ensemble C est un couplage maximal du graphe G. Un couplage est un ensemble d'arêtes qui n'ont aucun sommet en commun. Il est maximal lorsqu'il n'est plus possible d'y rajouter des arêtes.

Supposons que le couplage C n'est pas maximal. Alors, on peut y rajouter une arête dont les deux sommets sont distincts de ceux déjà sélectionnés pour la couverture C. Comme ils ne sont pas dans la couverture, celle-ci n'est pas maximale et l'algorithme COUVERTURE-SOMMET-APPROCHÉE n'est pas valide. C'est une contradiction car il a été établi qu'il l'était.

Exercice 5: Couverture gloutonne

Le professeur Sourire propose l'heuristique suivante pour résoudre le problème de la couverture de sommets. On choisit de façon répétée un sommet de plus haut degré, et on supprime toutes ses arêtes incidentes. Donner un exemple montrant que l'heuristique du professeur n'est pas optimale.

Le TP fournit une instance avec 60 sommets.

Exercice 6: Couverture sur des arbres

Donner un algorithme glouton efficace qui trouve en temps linéaire une couverture de sommets optimale pour un arbre.

Indice : les feuilles sont-elles dans la couverture optimale ?

Comme il existe une couverture optimale qui ne contient pas les feuilles, on ajoute tous les parents des feuilles dans une couverture partielle, on enlève les feuilles et les parents, puis on recommence le processus sur l'arbre résultant. On s'arrête soir lorsqu'il ne reste plus qu'une racine, soit lorsqu'il ne reste plus de sommet.

Exercice 7: Tournée-VC-Approchée (pire cas)

Donner un exemple de graphe pour lequel TOURNÉE-VC-APPROCHÉE engendre toujours une solution atteignant le facteur d'approximation 3/2.

4 sommets avec des coûts unitaires sur les cotés et 2 sur les deux diagonales. L'arbre couvrant de poids minimal est une chaîne qui consiste en trois cotés. En fonction de la racine choisie, on passera par les diagonales pour une tournée de coût 6 tandis que l'optimal est 4.

Exercice 8: Tournée-VC-Approchée (optimalité)

Donner un exemple de graphe pour lequel TOURNÉE-VC-APPROCHÉE engendre toujours une solution optimale.

3 sommets en triangle.

Exercice 9: Inégalité triangulaire

On suppose qu'un graphe non-orienté complet G = (V, E) ayant au moins 3 sommets a une fonction de coût c qui vérifie l'inégalité triangulaire. Prouver que $c(u, v) \geq 0$ pour tout $u, v \in E$.

Supposons que ce soit le cas pour u et v : $c(u, v) < 0$. Considérons un troisième sommet w. Sans perte de généralité, on peut supposer que $c(u, w) \leq c(v, w)$ (sinon, on inverse le raisonnement). On a alors $c(v, w) \geq c(u, w) + c(u, v)$ ce qui contredit l'inégalité triangulaire.

Exercice 10: Distance euclidienne

Supposer que les sommets d'une instance du problème du voyageur de commerce soient des points du plan et que la fonction de coût $c(u, v)$ soit la distance euclidienne entre les points u et v. Montrer qu'une tournée optimale ne se recoupe jamais elle-même.

Exercice 11: Couverture-Ensemble-Glouton (application)

On considère chacun des mots suivants comme un ensemble de lettres : `aride, date, drain, heron, louche, nom, short, slalom, snob, these`. Montrer quelle est la couverture d'ensemble produite par Couverture-Ensemble-Glouton (en cas d'égalité, le choix glouton se fait en faveur du mot qui apparaît le premier dans le dictionnaire).

Quelle est la couverture optimale ?

> Si on prend le premier choix en cas d'égalité, on obtient : `louche, drain, short, slalom, snob`.

Exercice 12: Couverture-Ensemble-Glouton (pire cas)

Donner un exemple de graphe pour lequel Couverture-Ensemble-Glouton engendre toujours une solution atteignant un facteur d'approximation strictement supérieur à 3.

Exercice 13: Couverture-Ensemble-Glouton (optimalité)

Donner un exemple de graphe pour lequel Couverture-Ensemble-Glouton engendre toujours une solution optimale.

Exercice 14: Sous-graphe acyclique

Soit un graphe orienté $G = (V, E)$. On cherche le plus grand sous-ensemble des arcs E tel que le graphe résultant soit acyclique. Concevoir un algorithme d'approximation 2.

Indice : numéroter les sommets arbitrairement et séparer les arcs en deux sous-ensembles (ceux allant des petits sommets vers les grands et les autres).

Établir une borne sur la taille optimale.

> Sélectionner le plus grand des sous-ensembles. Le cardinal optimal est $|E|$. Comme on sépare l'ensemble en deux et que l'on garde le plus grand ensemble, il est de taille supérieure ou égale à $|E|/2$.