Multicore Programming

Scheduling

Louis-Claude Canon
louis-claude.canon@univ-fcomte.fr

Bureau 414C

Master 1 computer science – Semester 8

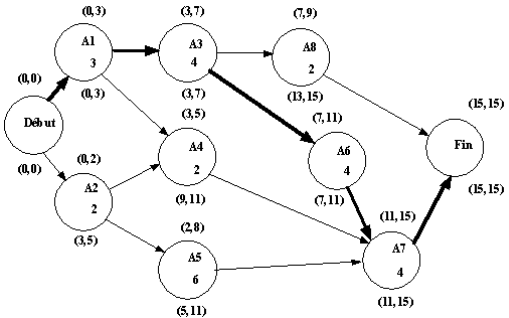
Outline

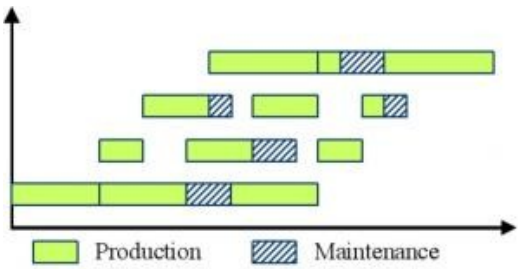
Outline

Définition

- Le problème d'ordonnancement (*scheduling*) consiste à organiser et optimiser dans le temps la réalisation d'un ensemble de tâches, compte tenu de contraintes.
- Prise en compte simultanée des contraintes de temps et de ressources pour optimiser l'exécution d'activités.

Représentations : DAG et diagramme de Gantt





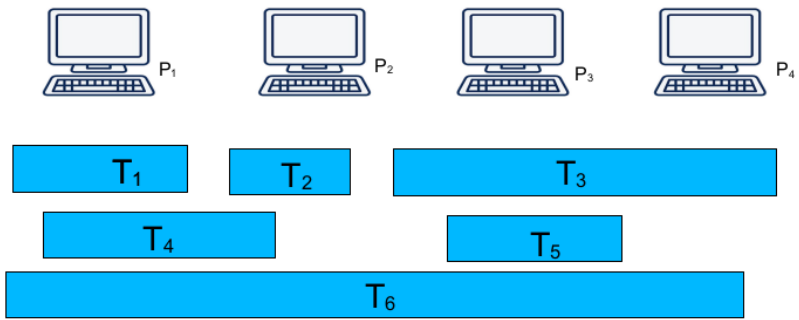
Contextes applicatifs

L'ordonnancement est un problème qui concerne un grand nombre de domaines. Quelques exemples de domaines :

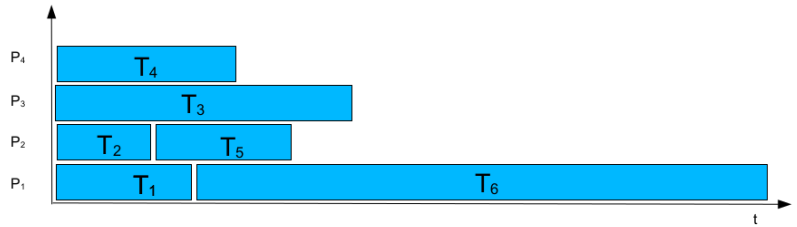
- Production : ateliers (*shop*) ;
- Projets : gestion de projets ;
- Administration : gestion de ressources humaines, emploi du temps ;
- Informatique : exécution de programmes, optimisation de code.

Problème illustratif (1/2)

Notre problème : trouver un algorithme pour placer un ensemble de tâches sur des machines.



Problème illustratif (2/2)



Types d'approche

- Solution optimale : tester toutes les solutions ou trouver un algorithme (*bruteforce*).
- Étude de la complexité du problème.
- Technique d'optimisation combinatoire.
- Bonne heuristique si problème difficile ou algorithme d'approximation (avec une performance garantie).

Outline

Notation $\alpha|\beta|\gamma$

Classification à trois champs (Graham et al. 1979) :

- α Caractéristiques des ressources.
- β Caractéristiques des tâches.
- γ Critère(s) à optimiser.

Les ressources : α

- Problème à une machine : $\alpha = 1$
- Problème à *m* machines :
  - $\alpha = P$ machines *identiques* : une tâche a le même temps d'exécution quelque soit la machine.
  - $\alpha = Q$ machines *uniformes* : les temps d'exécution sont proportionnels à la performance des machines.
  - $\alpha = R$ machines *indépendantes* : certaines machines peuvent être spécialisées pour certaines tâches.

Les ressources : β

- Ensemble de n tâches : $T = \{T_1, \ldots, T_n\}$.
- Temps d'exécution d'une tâche : p_j.
- Date de début d'une tâche : s_j.
- Date de fin (complétion) d'une tâche : $C_j = s_j + p_j$.
- Graphe de précédence entre les tâches : $G = (T, E)$.

Les critères d'optimisation : γ

Sur l'ordonnancement global :

- Fin de l'ordonnancement (*makespan*) : $\gamma = C_{\max} = \max_j C_j$.
- Somme des fins d'exécutions : $\gamma = \sum C_j$.
- Débit (*flow*) : nombre de tâches finies par unité de temps.
- Avec pondération possible, multi-critères, etc.

Exemples illustratifs

$1||C_{\max}$ Optimisation du temps d'exécution global (makespan) sur une seule machine.

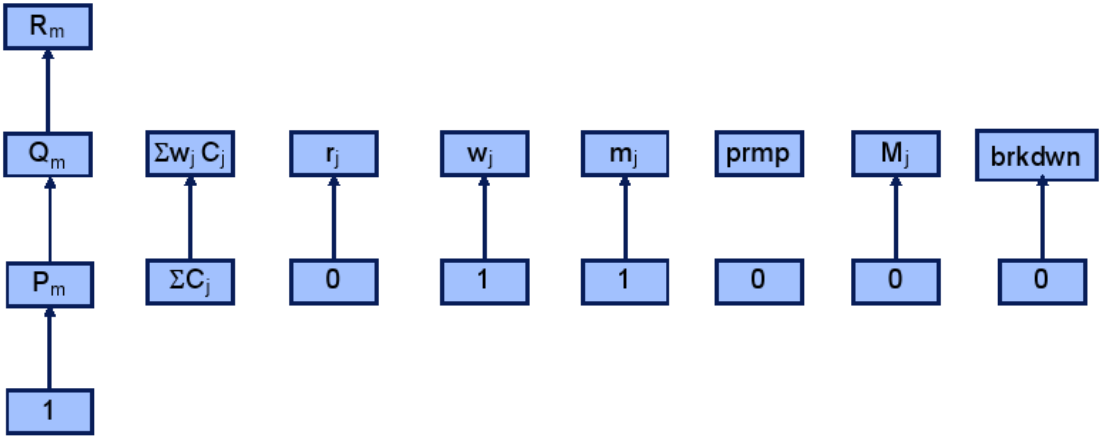
$1||\sum w_j C_j$ Optimisation de la somme des temps d'exécution pondérés par w_j sur une seule machine.

$P||C_{\max}$ Optimisation du makespan sur m machines identiques.

Organisation des problèmes

- Large gamme de problèmes issus de la combinaison des caractéristiques et d'un critère d'optimisation.
- Il existe de nombreuses liens entre ces problèmes :
  - certains sont identiques ;
  - certains en généralisent d'autres (réduction).
- Soit $\mathcal{P}_1$ un problème généralisé par $\mathcal{P}_2$ ($\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2$) :
  - Si $\mathcal{P}_1$ est NP-complet (difficile), $\mathcal{P}_2$ l'est aussi.
  - Si un algorithme efficace résout $\mathcal{P}_2$, alors il résout aussi $\mathcal{P}_1$.

Réductions classiques



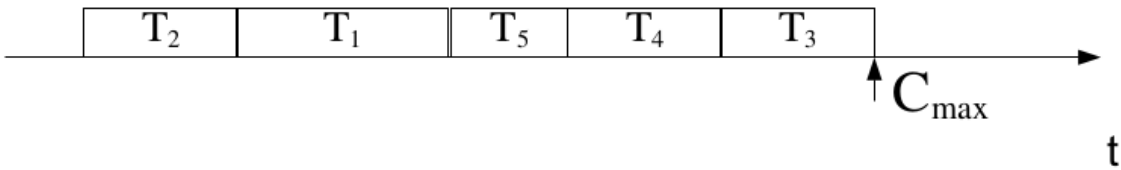
Outline

$1||C_{\max}$ (1/2)

- Ensemble de n tâches : $T = \{T_1, \ldots, T_n\}$.
- Temps d'exécution d'une tâche : p_j.
- Ordre optimal pour optimiser le makespan $C_{\max}$?

$1||C_{\max}$ (2/2)

Ordonnancement sans délai (ou compact) :



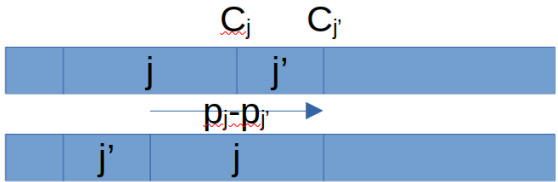
Preuve triviale :

- borne directe sur le makespan optimal : $\text{OPT} \geq \sum_j p_j$;
- sans délai, le makespan est $C_{\max} = \sum_j p_j \leq \text{OPT}$.

$1||\sum C_j$ (1/2)

- Ensemble de n tâches : $T = \{T_1, \ldots, T_n\}$.
- Temps d'exécution d'une tâche : p_j.
- Ordre optimal pour optimiser la somme des fins d'exécution $\sum C_j$?

$1||\sum C_j$ (2/2)

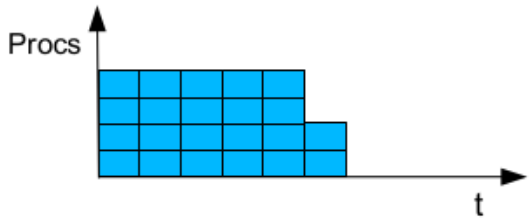


Shortest Processing Time (SPT) :

- Preuve par contradiction puis argument d'échange.
- Soit une solution optimale dans laquelle il existe 2 tâches non-ordonnées selon leurs temps d'exécution ($\exists j, j' : C_j < C_{j'}, p_j > p_{j'}$) et dont l'objectif est OPT.
- Après échange des 2 tâches, toutes les $N \geq 0$ tâches entre T_j et $T_{j'}$ finissent plus tôt (décalage de $p_j - p_{j'}$).
- Le nouvel objectif devient : $\text{OPT} - (N+1) \times (p_j - p_{j'}) < \text{OPT}$.
- On obtient une solution meilleure ce qui contredit l'optimalité de la solution considérée.

$P|p_j = 1|C_{\max}$

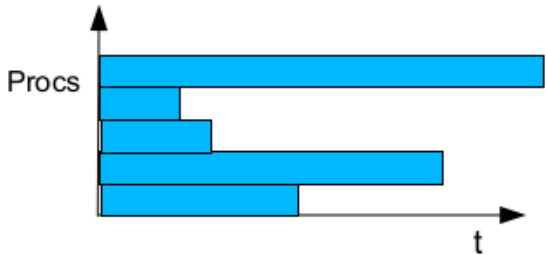
- Earliest Finish Time (EFT) ou ordonnancement compact au plus tôt.
- OPT $= \lceil \frac{n}{m} \rceil$.



Une borne directe pour le makespan optimal sur m machines : OPT $\leq \left\lceil \frac{\sum_j p_j}{m} \right\rceil$.

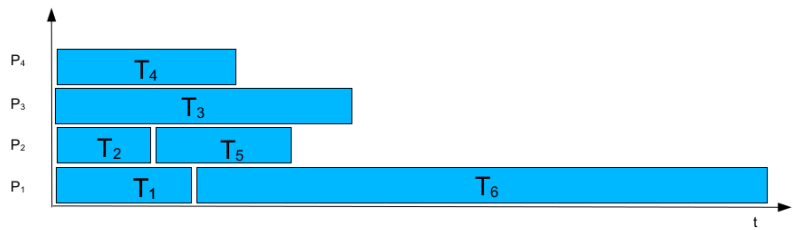
$P\infty||C_{max}$

Une tâche par machine.



$P||C_{max}$

- Ensemble de n tâches : $T = \{T_1, \ldots, T_n\}$.
- Temps d'exécution d'une tâche : p_j.
- Ordre et répartition optimaux pour optimiser le makespan C_{max} sur m machines identiques ?



- Problème difficile (NP-complet, Garey et Johnson 1978), pas de solution évidente.
- Le problème $R||C_{max}$ est donc aussi difficile (voir "réductions classiques").

Outline

Algorithme (ou heuristique) de liste

Définition :

- Les tâches sont ordonnées en liste en fonction d'un critère :
  - LPT/SPT : Longest/Shortest Processing Time First.
  - Aléatoire.
- Dès qu'une machine est disponible, elle exécute la première tâche de la liste (ordonnancement compact et au plus tôt).
- Robuste : utilisable même si les temps d'exécution p_j ne sont pas connus et avec un ordre aléatoire.

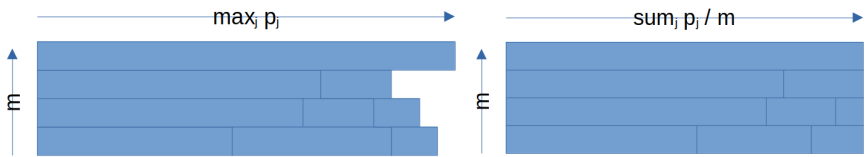
Borne de Graham : résultat (1/3)

Résultat :

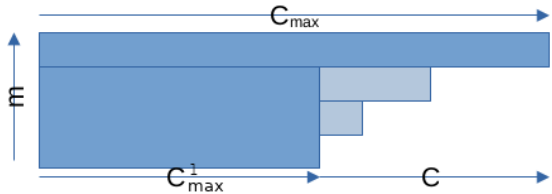
- Soit LST le makespan obtenu via un algorithme de liste.
- On peut borner la performance de cet algorithme : $\frac{LST}{OPT} \leq 2 - \frac{1}{m}$.
- On dit qu'il s'agit d'une $(2 - \frac{1}{m})$-approximation.

Propriétés utilisées dans la preuve :

- Borne sur le temps d'exécution maximum : $OPT \geq \max_j p_j$;
- Borne sur la charge moyenne : $OPT \geq \frac{1}{m} \sum_j p_j$;
- Un algorithme de liste commence les tâches au plus tôt.



Borne de Graham : preuve (2/3)



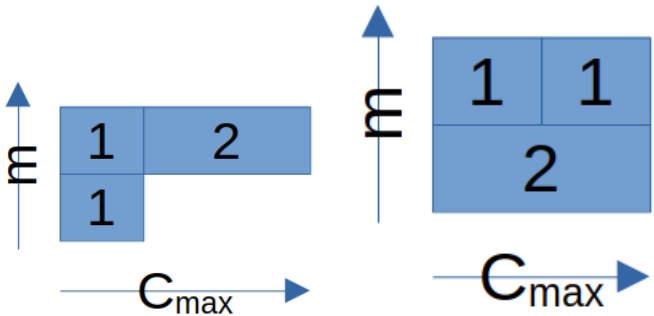
- Soit $C^1_{\max}$ la première date à laquelle au moins une machine devient disponible.
- Pas de délai avant $C^1_{\max}$ (ordonnancement compact et au plus tôt) : $m \times C^1_{\max} + C \leq \sum_j p_j$ et donc $C^1_{\max} \leq \text{OPT} - \frac{C}{m}$.
- Pas de tâche commençant après $C^1_{\max}$ (sinon, elle aurait été commencée à la date $C^1_{\max}$ puisqu'au moins une machine devient disponible) : $C \leq \max_j p_j$ et donc $C \leq \text{OPT}$.
- Intégration : $\text{LST} = C^1_{\max} + C \leq (2 - \frac{1}{m}) \times \text{OPT}$.

Borne de Graham : pire cas (3/3)

Quelle instance (i.e. nombre de tâches et temps d'exécution) permet d'obtenir le plus mauvais ratio pour un algorithme de liste pour $m = 2$ machines ?

Borne de Graham : pire cas (3/3)

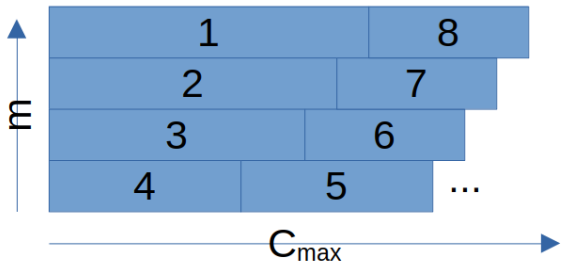
Quelle instance (i.e. nombre de tâches et temps d'exécution) permet d'obtenir le plus mauvais ratio pour un algorithme de liste pour $m = 2$ machines ?



- $\{p_j\} = \{1, 1, 2\}$.
- Dans ce cas, le facteur d'approximation par rapport à l'optimal est bien $2 - \frac{1}{m} = \frac{3}{2}$.
- Comme c'est aussi le cas pour chaque valeur de m, on dit que la borne de Graham est *tight*.

LPT : résultat (1/2)

- Longest Processing Time first.
- Heuristique de liste très répandue et intuitive (priorité aux tâches de poids maximum).
- Complexité en temps : $O(n\log(n))$.
- Facteur d'approximation (*tight*) : $\frac{\text{LPT}}{\text{OPT}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$.



LPT : pire cas (2/2)

Quelle instance permet d'obtenir le plus mauvais ratio pour LPT ?

- Exercice vu en TD.
- Pour $m = 2$, le ratio est $\frac{7}{6}$. On peut donc chercher une instance qui donne un makespan de 7 avec LPT alors que l'optimal est à 6.
- On sait aussi que LPT mettra les grandes tâches en premier alors que ce ne sera pas le cas dans l'ordonnancement optimal.

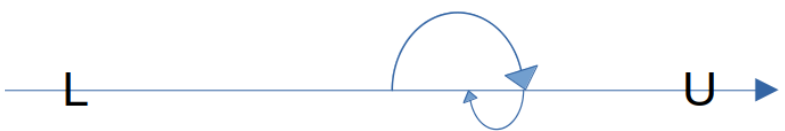
LPT : pire cas (2/2)

Quelle instance permet d'obtenir le plus mauvais ratio pour LPT ?

- Exercice vu en TD.
- Pour $m = 2$, le ratio est $\frac{7}{6}$. On peut donc chercher une instance qui donne un makespan de 7 avec LPT alors que l'optimal est à 6.
- On sait aussi que LPT mettra les grandes tâches en premier alors que ce ne sera pas le cas dans l'ordonnancement optimal.

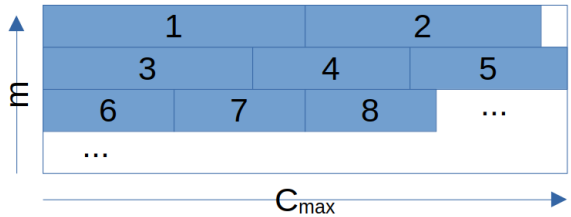
MULTIFIT : résultat (1/2)

- Recherche dichotomique sur le makespan entre $\left\lceil \max(\frac{1}{m}\sum_j p_j, \max_j p_j) \right\rceil$ et $\left\lceil \max(\frac{2}{m}\sum_j p_j, \max_j p_j) \right\rceil$.
- Pour chaque makespan considéré : application de l'heuristique First-Fit-Decreasing (FFD).
- Complexité en temps : $O(n\log(n) + n\log(m))$.
- Facteur d'approximation (*tight*) : $\frac{\text{MULTIFIT}}{\text{OPT}} = \frac{13}{11}$.



MULTIFIT : FFD (2/2)

- On tri les tâches par temps d'exécution décroissant.
- On commence par une seule machine.
- Pour chaque tâche : on l'ordonnance sur la première machine qui peut la terminer avant le makespan considéré.
- Si aucune machine ne le permet, on en rajoute une jusqu'à m.
- Si toutes les tâches n'ont pas été ordonnancées, FFD échoue.



Outline

Techniques de preuves

- Argument d'échange : on suppose que 2 tâches sont échangées dans une autre solution (exemple : $1||\sum C_j$).
- Preuve par contradiction (exemple : $1||\sum C_j$).
- Établissement de bornes simples (exemple : borne directe pour $1||C_{\max}$, $P|p_j = 1|C_{\max}$ et $2 - \frac{1}{m}$).

Scheduling for Parallel Processing, 2009

Présente une bonne introduction à l'ordonnancement dans les 4 premiers chapitres.